



منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

الميكانيك الهندسي

السكون والحركة



الدكتور جمعة شحادة
أستاذ مساعد في قسم هندسة
السيارات والآليات الثقيلة

الدكتور مهلب الداود
أستاذ مساعد في قسم هندسة
التصميم الميكانيكي

الدكتور حسين حمزة
مدرس في قسم هندسة الميكانيك العام

الدكتور سليمان الأعوج
عضو هيئة تعليمية في قسم هندسة
الميكانيك العام

١٤٣٧ - ١٤٣٨هـ
٢٠١٦ - ٢٠١٧م

جامعة دمشق



الميكانيك الهندسي

السنة : الأولى

القسم الأول : الهندسة الطبية .

القسم الثاني : الهندسة الالكترونية وهندسة الاتصالات .

القسم الثالث : هندسة الحواسيب والأتمتة .

القسم الرابع : هندسة الطاقة الكهربائية .

Damascus University

منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية



الميكانيك الهندسي

السكون والحركة والتحريك

تأليف

الدكتور جمعة شحادة
أستاذ مساعد في قسم هندسة
السيارات والآليات الثقيلة

الدكتور مهلب الداود
أستاذ مساعد في قسم هندسة
هندسة التصميم الميكانيكي

الدكتور حسين حمزة
مدرس في قسم هندسة
الميكانيك العام

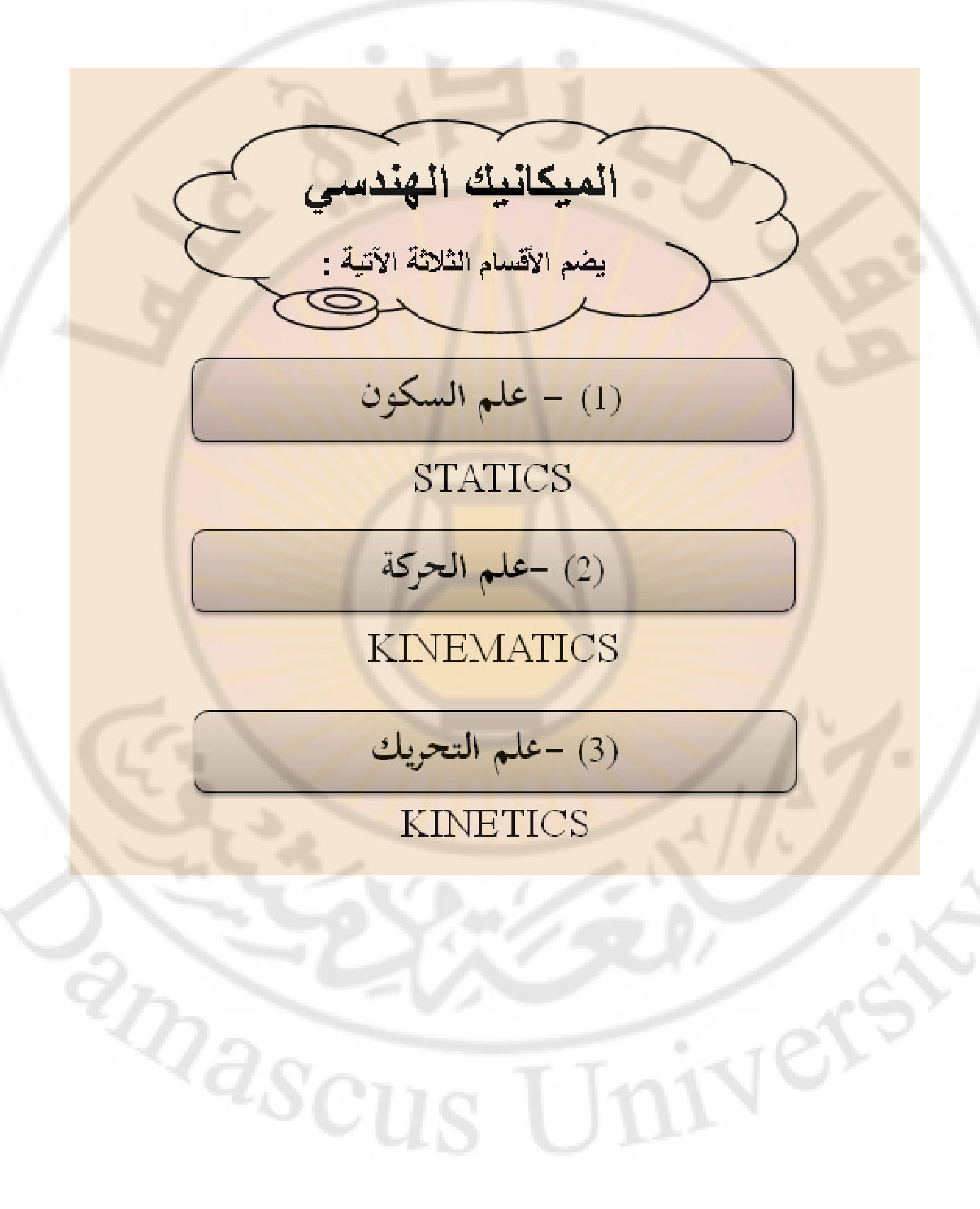
الدكتور سليمان الأعوج
عضو هيئة تعليمية في قسم هندسة
الميكانيك العام

الطبعة الأولى

جامعة دمشق

1437–1438هـ

2016–2017 م



Damascus University

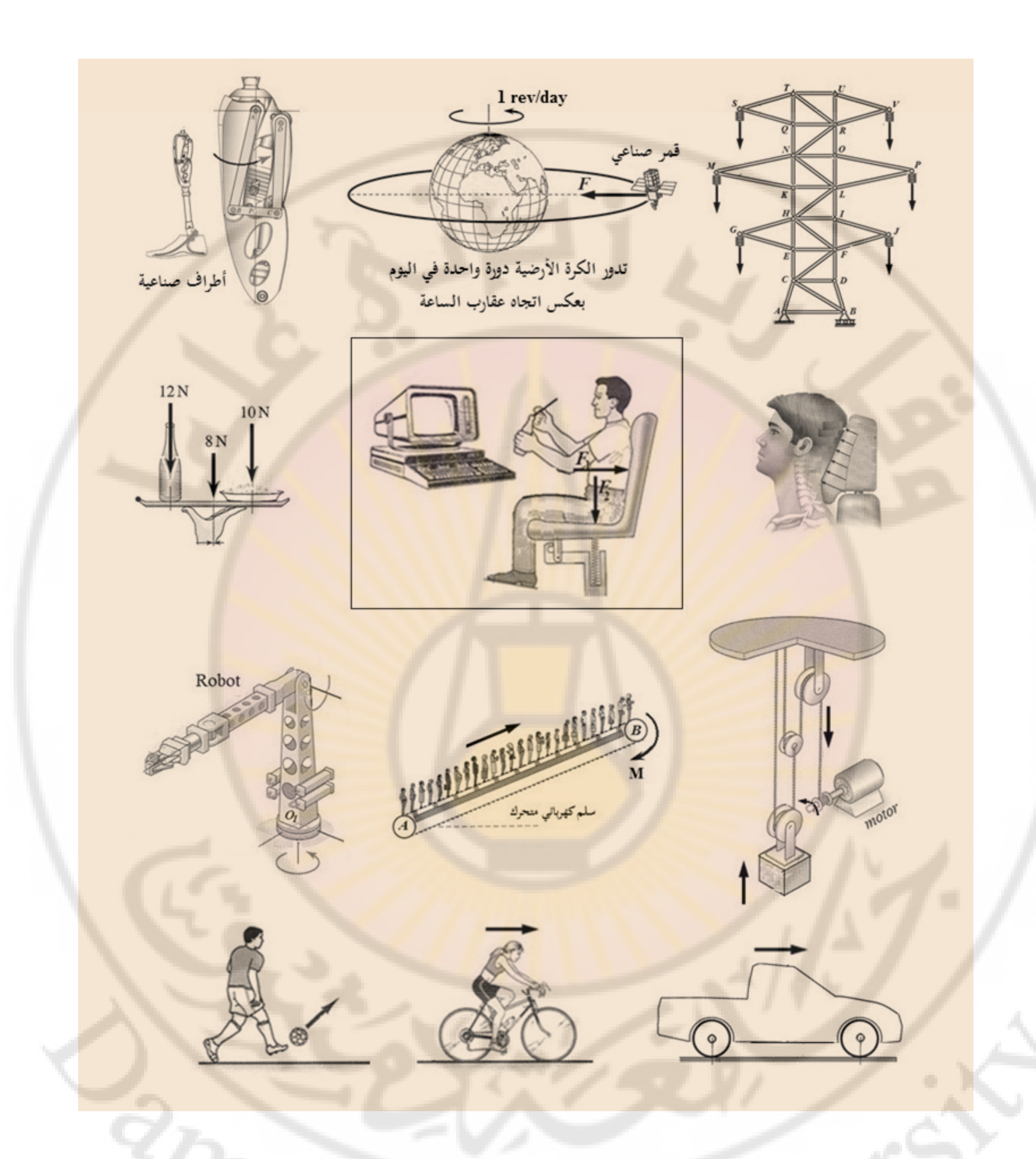
الفهرس

Damascus University

الباب الثاني : علم الحركة (Kinematics)

الباب الثالث : علم التحريك (Kinetics)





تعليق : الميكانيك الهندسي يدرس توازن الأجسام وحركاتها المتنوعة ، والتي نلاحظها كما تبيّن الصور في الواقع العملي ، وفي الحقول الهندسية المختلفة .

Damascus University

المقَدِّمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الميكانيك الهندسي هو مفتاح العلوم الهندسية بكافة تخصصاتها ، ولهذا فهو أحد المقررات التي يبدأ بها الطالب رحلته الدراسية في رحاب كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية ، والتي تحتضن في الوقت الحاضر الأقسام الآتية : الهندسة الطبية ، الهندسة الالكترونية وهندسة الاتصالات، هندسة الحواسيب والأتمتة ، هندسة الطاقة الكهربائية ، هندسة الميكانيك العام ، هندسة التصميم الميكانيكي، هندسة السيارات والآليات الثقيلة، هندسة ميكانيك الصناعات النسيجية وتقاناتها . وعلى الرغم من أن هذا الكتاب قد أُعدَّ خصيصاً لبعض الأقسام المذكورة آنفاً ، إلا أنه في الحقيقة يلبي احتياجات وطموحات جميع طلاب الأقسام الهندسية بلا استثناء .

هذا ويبحث الكتاب الحالي ، الذي يمتاز بحلته الجديدة ومضمونه العصري ، في تأثيرات القوى المختلفة في الأجسام الصلبة وذلك في حالتي السكون والحركة . وبناءً على ذلك يضم الكتاب ثلاثة أقسام وهي : علم السكون (Statics) ، وعلم الحركة (Kinematics)، وعلم التحريك (Kinetics).

تتوزع أبواب الكتاب على عدّة فصول ، موضوعاتها أُعدَّت انطلاقاً من الخبرة العريقة للمؤلفين ، واستناداً إلى أحدث المراجع العربية والأجنبية ،كما أن صفحاتها حافلة بالمسائل النموذجية المحلولة وغير المحلولة . حيث يستعرض الباب الأول المبادئ الأساسية لعلم السكون ، ثم يتحدث بإسهاب عن توازن الأجسام التي تخضع لتأثير قوى واقعة في مستوٍ واحد ، وبعدها يتناول كيفية تحليل الهياكل الشبكية. كما يتضمن هذا الباب توازن الأجسام التي تخضع لتأثير قوى فراغية تقع في مستويات مختلفة ، ويهتم أيضاً بدراسة الاحتكاك وتطبيقاته المتنوعة ، وبكيفية تحديد إحداثيات مركز الثقل للجسم الصلب .أما

الباب الثاني فيبحث في العلاقة بين الموضع والسرعة والتسارع من جهة وزمن الحركة من جهة أخرى . وتجري الدراسة إما بإهمال الأبعاد الهندسية للجسم المتحرك، ويسمى الجسم المدروس عندئذ جسيماً مادياً ، وإما باحتساب تلك الأبعاد .

يدرس الباب الثالث حركة الجسيمات المادية والأجسام الصلبة ولكن مع تناول القوى المسببة لها والناتجة عنها . كما يبين هذا الباب كيفية حل المسائل بثلاث طرق مختلفة وهي : طريقة القوة والتسارع ، وطريقة العمل والطاقة ، وطريقة الدفع وكمية الحركة. وفي هذا الباب أيضاً تطبيقات عمليّة رائعة على القانون الأساسي في التحريك كموضوع الأقمار الصناعية والاهتزازات الميكانيكية ، حيث استخدمت لهذه الغاية برامج الحسابات الشهيرة وتشمل : Excel وMatlab وSimulink. وللتأكيد على أهمية استيعاب الأسس النظرية فقد وردت في نهاية الكتاب مجموعة من الأسئلة النظرية النموذجية التي تغطي أقسام الكتاب كافة . وفي هذا المضمار ينبغي أن نتذكر جيداً القول العربي الشهير: " النظري بلا عملي جنون ، والعملي بلا نظري لا يكون. "

والأمل في الختام أن يشُقَّ هذا الكتاب طريقه إلى المكتبة العلمية العربية ، لكي يُنير الطريق أمام الشباب أولئك الذين يعتمد على سواعدهم وأفكارهم مستقبل الوطن العربي وعزته. والله ولي التوفيق .

دمشق الواقع في 2016/09/25 م

المؤَلِّفُون

Damascus University

الباب الأول

علم السكون

STATICS

يتضمن هذا القسم :

- **الفصل الأول**: مبادئ علم السكون .

CHAPTER 1 Statics Principles

- **الفصل الثاني**: توازن القوى المستوية .

CHAPTER 2 Equilibrium of Coplanar Forces

- **الفصل الثالث**: تحليل الهياكل الشبكية .

CHAPTER 3 Analysis of Trusses

- **الفصل الرابع**: توازن القوى الفراغية .

CHAPTER 4 Equilibrium of Forces in Space

- **الفصل الخامس**: قوى الاحتكاك .

CHAPTER 5 Friction Forces

- **الفصل السادس**: مراكز الثقل .

CHAPTER 6 Centers of Gravity

Damascus University



تعليق : توازن أبراج الاتصالات (Communication towers) والأبراج الحاملة لخطوط التوتر الكهربائي العالي هي من الموضوعات التي يتناولها علم السكون .

Damascus University

الفصل الأول

مبادئ علم السكون

STATICS PRINCIPLES

1-1 مفاهيم وقوانين أساسية (Basic Concepts and Laws) .

2-1 مجموعات القوى (Force Systems).

3-1 محصلات القوى (Resultants of Force Systems).

4-1 القيود وردود أفعالها (Constraints and Reactions).

تمهيد :

الميكانيك الهندسي هو علم يهتم بدراسة تأثيرات القوى المختلفة في الأجسام الصلبة وذلك في حالتي السكون والحركة . ويضم ثلاثة فروع :

1– علم السكون (Statics) : ويسمى أيضاً علم التوازن ، وهو الفرع الذي يبحث في توازن الأجسام الصلبة في حالتي السكون والحركة المنتظمة . والشرط الأساسي لاتزان الجسم الصلب هو توازن القوى الواقع تحت تأثيرها.

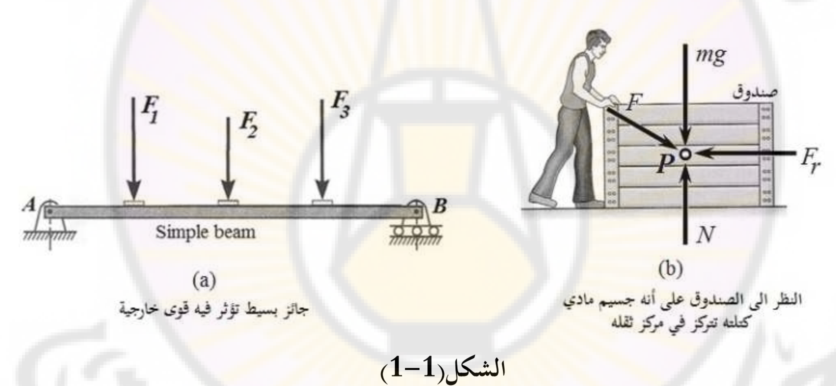
2– علم الحركة (Kinematics) : ويسمى أيضاً علم الحركة المجردة ، وهو الفرع الذي يبحث في حركة الأجسام الصلبة دون الرجوع إلى القوى المسببة للحركة .

3– علم التحريك (Kinetics) : وهو الفرع الذي يبحث في حركة الأجسام الصلبة مع الرجوع إلى القوى المسببة للحركة . والديناميك (Dynamics) هو العلم الذي يضم الحركة والتحريك معاً .

1–1 مفاهيم وقوانين أساسية (Basic Concepts and Laws) :

مفاهيم أساسية : تستخدم في دراسة الميكانيك الهندسي المفاهيم الأساسية الآتية :

الجسم الصلب (Rigid body) : هو الجسم الذي تكون الأبعاد بن مختلف نقاطه ثابتة مهما كانت القوى والمؤثرات الخارجية . في الواقع ، جميع الأجسام الصلبة تتشوه تحت تأثير القوى المؤثرة فيها ، لكن عندما يكون التشوه في الشكل صغيراً جداً عندها يمكن استخدام فرضية الجسم الصلب دون الوقوع في أخطاء تذكر .ويُعدّ **الجائز البسيط** (Simple beam) من الأمثلة البسيطة على الجسم الصلب ، وهو عبارة عن عارضة ترتكز على مسندين وتؤثر فيها حمولات مختلفة كما يبين الشكل(1–1).



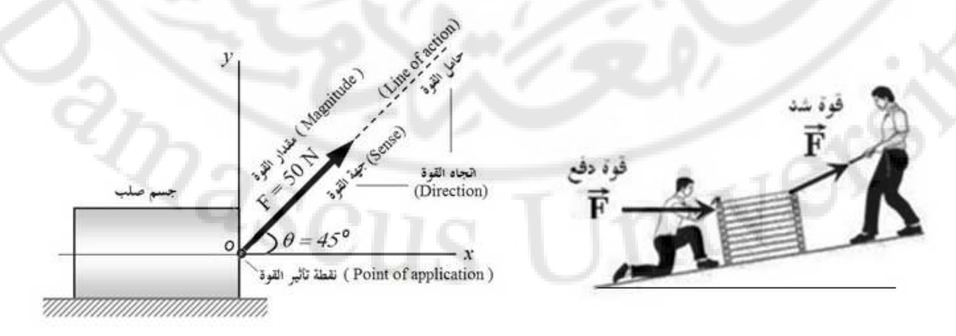
الشكل(1–1)

الجُسَيْم المادي (Particle) : هو أصغر شيء ممكن ، وكان يُطلق عليه في الماضي النقطة المادية ، ويستخدم هذا المفهوم على نطاق واسع في الحركة والتحريك لتبسيط الدراسة . ويمثل الجُسَيْم في واقع الأمر جسماً حقيقياً أُهملت أبعاده وكتلته تتركز في نقطة واحدة هي مركز ثقله . ففي المثال الموضح في الشكل المذكور آنفاً يمكن اعتبار الصندوق جُسَيْماً مادياً P لتسهيل الدراسة .

الزمن (Time) : هو مقياس للفترة التي يستغرقها جسم ما في أثناء حركته ، أو خلال بقائه في حالة معينة .

الكتلة و الوزن (Mass &Weight) : لقد بيَّنت التجربة أن كل جسم يكتسب عند سقوطه الحر على الأرض تسارعاً وذلك تحت تأثير قوة تدعى قوة الجاذبية الأرضية ويرمز لها بالحرف**W**. وهذا التسارع المكتسب يسمى بتسارع الجاذبية الأرضية ويرمز له بالحرف g ، ومقداره يختلف باختلاف المكان على سطح الأرض وفي الحسابات التقريبية نعتبر $g = 9.8\ m/s^2$. وتُعرّف الكتلة بأنها مقدار المادة في جسم معين ، وتقدر عادة بوحدة الكيلوغرام Kg . أما الوزن **W** فيمثل قوة جذب الأرض للجسم ، ويقدر عادة بوحدة نيوتن N كما أنه يتحدد بالعلاقة الرياضية الشهيرة : $W=mg$. حيث تمثل m كتلة الجسم ، وتمثل g تسارع الجاذبية الأرضية . وبناء على ذلك فإنّ وزن كتلة مقدارها 1kg يساوي 9.8 N ، بينما وزن كتلة مقدارها 5 kg يساوي 49 N .

القوة (Force) : هي تأثير جسم في جسم آخر . ويجري تمثيل هذه القوة هندسياً بشعاع كما هو مبين في الشكل (1–2)،ويتعين تأثيرها بالمقدار (Magnitude) والاتجاه (Direction) بصورة أساسية. حيث يشمل مصطلح الاتجاه هنا مفهومي الجهة (Sense) وحامل القوة (Line of action). هناك أنواع كثيرة من القوى كقوة التجاذب بين كوكب الأرض الذي نعيش عليه والقمر، وقوى الوزن ، وقوى الدفع ، وقوى السحب ، وقوى الشد ، وقوى الضغط ، وقوة الجذب المغناطيسية ، ومقاومة الرياح ، والمقاومات الناتجة عن الاحتكاك وغيرها .



الشكل(1–2)

المقادير العددية أو السُّلَّمية (Scalars) : هي كميات فيزيائية غير موجَّهة تتعين بقيمتها العددية فقط مثل الزمن والكتلة والمسافة والمساحة والحجم .

المقادير الشعاعية أو المُتَّجهات (Vectors) : هي كميات فيزيائية تتعين بقيمتها العددية واتجاهها معاً مثل القوة والسرعة والتسارع .وقد جرت العادة كتابة المقدار الشعاعي بحرف غامق والمقدار العددي بحرف عادي فاتح وذلك تسهيلاً لعملية التنضيد والطباعة .

وحدات القياس : في الوقت الحاضر ، يستخدم في جامعات العالم وعلى نطاق واسع نظام الوحدات الدولي SI (International System) بدلاً من النظام الانكليزي التقليدي. إلا أن الضرورة تقتضي الإلمام بالنظامين بسبب استخدامهما في الأسواق المحلية والعالمية. يبين الجدول الآتي الكميات الأساسية المستعملة في علم الميكانيك.

جدول وحدات القياس المتداولة			
التسميات	**الرمز**	**وحدة القياس الدولية**	**وحدة القياس الانكليزية**
الطول Length	L	متر (m)	• قدم (ft) foot • بوصة (in.) inch
الكتلة Mass	M	كيلوغرام (kg)	رطل كتلي (lbm)
القوة Force	F	نيوتن (N)	رطل (lb) Pound
الزمن Time	T	ثانية (S)	ثانية (S)
عزم القوة Moment	M	نيوتن–متر (N-m)	• رطل–قدم (lb-ft) • رطل–بوصة (lb-in.)
السرعة Velocity	V	متر / ثانية (m/s)	قدم / ثانية (ft/s)
التسارع Acceleration	A	متر / مربع الثانية (m/s^2)	قدم / مربع الثانية (ft/s^2)
المساحة Area	A	متر مربع (m^2)	قدم مربع (ft^2)

التحويل من الوحدات الانكليزية إلى الوحدات الدولية :

1 ft = 0.3048 m

1 in. = 25.4 mm = 0.0254 m

1 lb mass = 0.4536 kg

1 lb = 4.448 N

1 ft/s = 0.3048 m/s

1 ft/s^2 = 0.3048 m/s^2

1 lb-ft = 1.356 N-m

1 ft^2 = 0.0929 m^2

قوانين أساسية :

1- **مبدأ العطالة أو القصور الذاتي** : يعرف هذا المبدأ أيضاً بقانون الحركة الأول (First law of motion) وهو يبين أن جميع الأجسام في الطبيعة عاجزة عن تحريك ذاتها إلا إذا خضعت لتأثير قوى خارجية. وينص : يبقى الجسم الساكن ساكناً ويحافظ الجسم المتحرك بانتظام على حالته ، ما لم تؤثر فيه قوة تغير من حالته الراهنة .

2- **القانون الأساسي في التحريك** : يعرف هذا القانون أيضاً بقانون الحركة الثاني(Second law of motion) وينص :إذا أثرت قوة أو عدة قوى في جسم كتلته m فإنه يكتسب تسارعاً $\boldsymbol{a}$ يتناسب طرداً مع محصلة تلك القوى ويؤثر بجهتها. ويعبر عن ذلك بالعلاقة الرياضية الآتية :

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad (1)$$

وينتج من هذه العلاقة أنه إذا كانت محصلة القوى $\sum \boldsymbol{F}$ المؤثرة في الجسم تساوي صفراً فإن تسارعه يكون مساوياً للصفر ($a = 0$) . وبناءً على ذلك يكون الجسم إمّا ساكناً (v = 0) وإمّا متحركاً بسرعة خطية ثابتة في المقدار والاتجاه (v = constant). وعلم

التوازن يهتم فقط بدراسة اتزان الأجسام في حالتي السكون والحركة بسرعة ثابتة . يظهر المثال المبين في الشكل(1–3) اتزان القطار عندما يكون في حالتي السكون والحركة بسرعة ثابتة ، بالإضافة إلى حالة فقد الاتزان عندما تكون حركة القطار غير منتظمة.



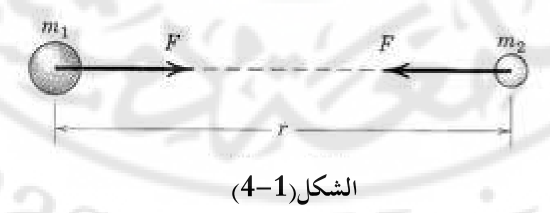
الشكل(1–3)

3– **مبدأ الفعل وردّ الفعل** : يعرف هذا المبدأ أيضاً بقانون الحركة الثالث (Third law of motion) وينص : كل فعل يقابله ردّ فعل يساويه بالمقدار ويعاكسه بالاتجاه ولهما نفس الحامل .

4– **قانون التجاذب** (Law of gravitation) وينص : إن قوة التجاذب بين أي جسمين في الطبيعة تتناسب طرداً مع جداء كتلتيهما وعكسياً مع مربع المسافة بينهما .

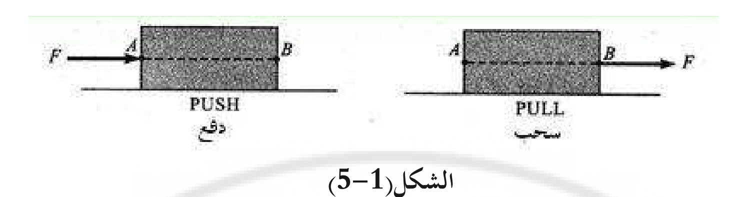
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ; \quad G = 6.673(10^{-11})\ \frac{m^3}{kg.s^2} \qquad (2)$$

حيث G يمثل ثابت الجاذبية العام .



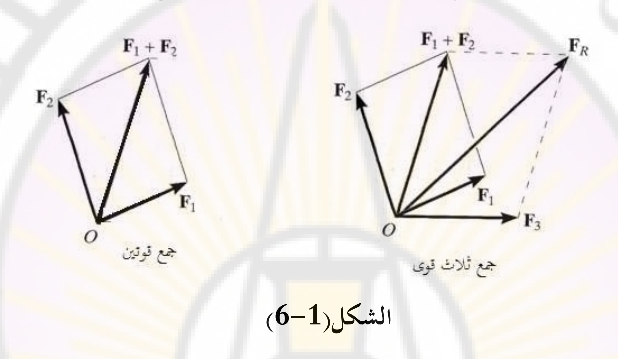
الشكل(1–4)

5– **مبدأ انزياح القوة** (Principle of Transmissibility of Force) : لا يتغير شرط التوازن لجسم صلب عند انزياح نقطة تأثير القوة على امتداد حامل تلك القوة.



الشكل(1–5)

6- **قانون متوازي الأضلاع لجمع القوى** (Law of parallelogram) : إنَّ محصلة قوتين مؤثرتين في نقطة ما من جسم صلب تساوي بطولها قطر متوازي الأضلاع المنشأ على هاتين القوتين .ويوضح الشكل(1–6) كيفية جمع أكثر من قوتين.



الشكل(1–6)

7- **مبدأ التوازن الديناميكي** (Dynamic equilibrium) : يعرف هذا المبدأ أيضاً بمبدأ دالامبير ، لأن دالامبير هو أول عالم أشار إلى أن القانون الأساسي في التحريك يمكن تحويله إلى معادلة توازن بعد إضافة قوة وهمية هي **($- m\boldsymbol{a}$)** إلى مجموع القوى الحقيقية المؤثرة في الجسم المدروس. وللحصول على هذا المبدأ نكتب القانون الأساسي في التحريك ، ثم ننقل الطرف الأيمن من هذا القانون إلى الطرف الأيسر فينتج:

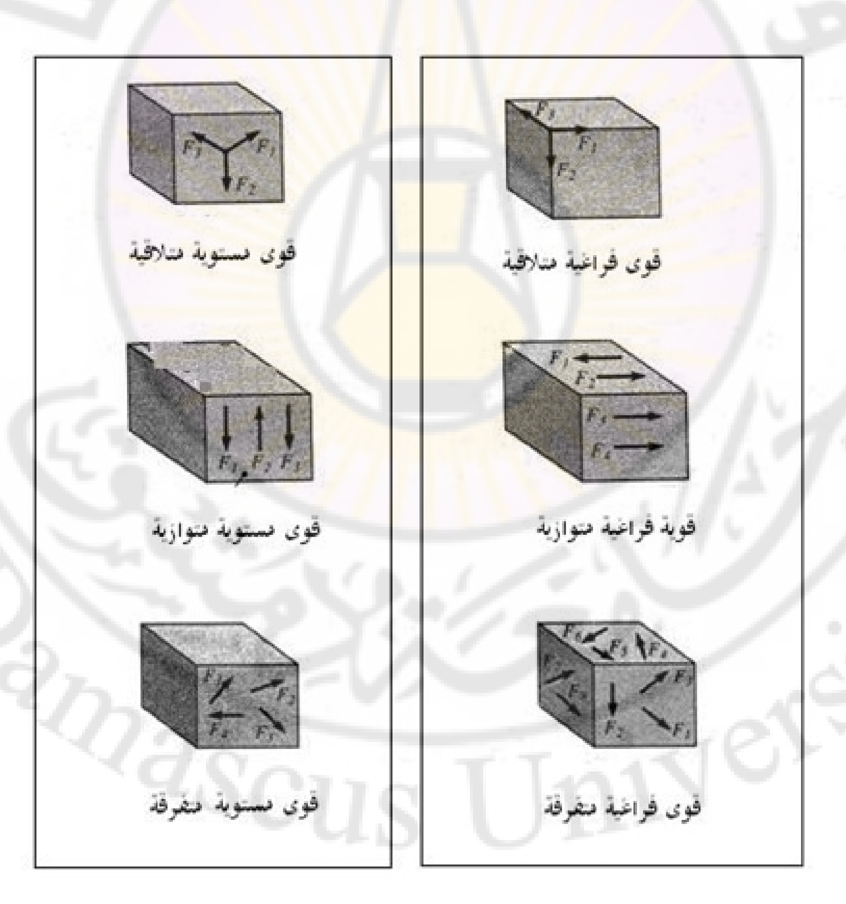
$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \sum \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad (3)$$

حيث تسمى القوة الجديدة **($- m\boldsymbol{a}$)** قوة عطالة الجسم ، وهي تساوي جداء كتلة الجسم m بمقدار تسارعه a ، واتجاهها يكون معاكساً لاتجاه التسارع .ويمكن أن نفسر هذه المعادلة الناتجة بأنه : لو أثرت في الجسم قوة معاكسة لاتجاه التسارع لتوازن هذا الجسم توازناً ديناميكياً . وقد جرت العادة بأن تستخدم فكرة التوازن الديناميكي في الدراسة المتقدمة لعلم التحريك (Advanced Dynamics).

1–2 مجموعات القوى Force Systems :

مجموعة القوى : هي عدة قوى تؤثر في جسم صلب في آن واحد .وتصنف مجموعات القوى (الشكل 1–7) كما يلي :

- مجموعات القوى المستوية (Coplanar Force Systems): وتكون قوى متلاقية أو متوازية أو متفرقة .
- مجموعات القوى الفراغية (Non-coplanar Force Systems): وتكون أيضاً إمّا متلاقية أو متوازية أو متفرقة .



الشكل(1–7)

Damascus University

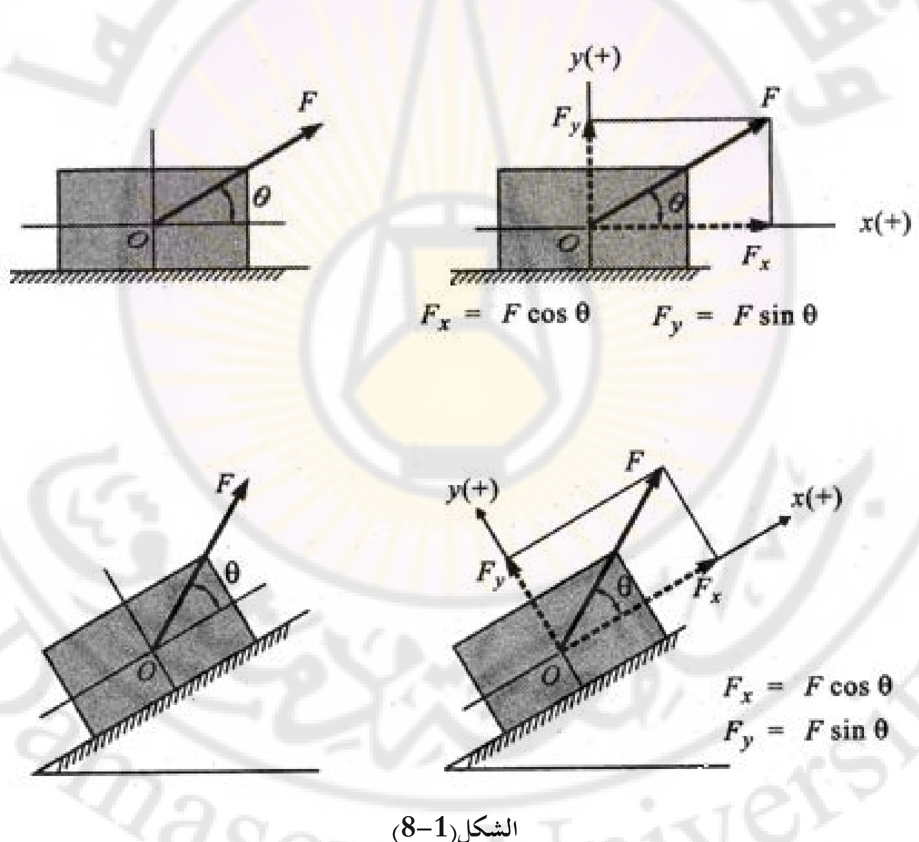
المُركّبات (المساقط) المتعامدة للقوة Rectangular Components of a Force

إن تحليل القوة **F** إلى مركبتين متعامدتين $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$ كما هو واضح في الشكل (1-8) هو طريقة التحليل الشائعة . بعد تأمل الشكل نلاحظ أن :

$$F_x = F \cos \theta \quad ; \quad F_y = F \sin \theta \qquad (4)$$

حيث تمثل F مقدار الشعاع **F** ويمثل كل من F_x و F_y قيم الشعاعين $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$ ، وبالاستعانة بشعاعي الواحدة **i** و **j** يمكن كتابة معادلة القوة بالشكل الهندسي الآتي :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \qquad (5)$$

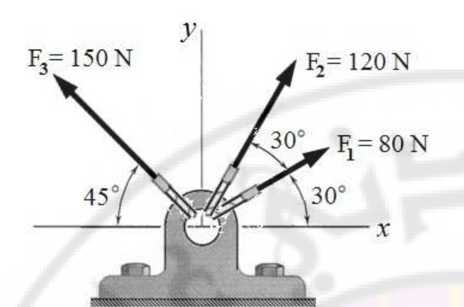


الشكل(1-8)

يختار الطالب في الغالب جملة الإحداثيات في المسائل حسب رغبته ، غير أن الاختيار المنطقي يعتمد على طبيعة وشكل المسألة المراد حلها . يُبيّن المثال رقم (1) كيفية تحليل القوى المؤثرة في اتجاهات مختلفة .

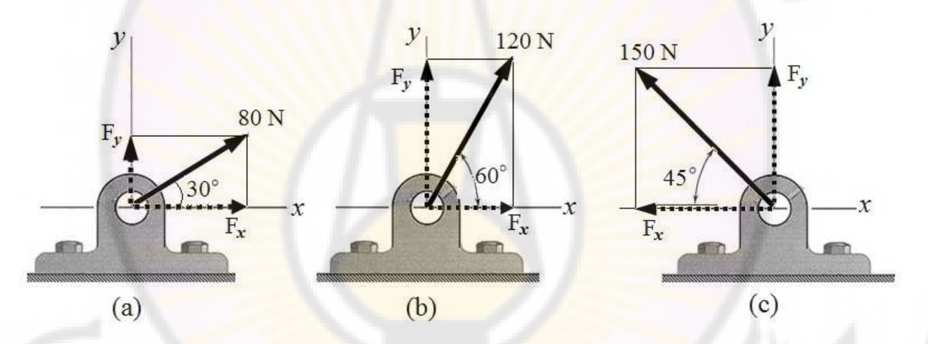
مثال رقم (1)

أوجد المسقطين الأفقي والشاقولي لكلِّ قوة من القوى الثلاث المعلومة والموضحة في الشكل المجاور .



الحل : ....

نحلِّل القوى الثلاث كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب مركباتها المتعامدة كما يلي:



a) **القوة الأولى** : إن مسقطي القوة $\mathbf{F}_1$ هما :

$$F_x = 80\cos 30° = 69.3\ N\ (\rightarrow)$$
$$F_y = 80\sin 30° = 40\ N\ (\uparrow)$$

b) **القوة الثانية** : إن مسقطي القوة $\mathbf{F}_2$ هما :

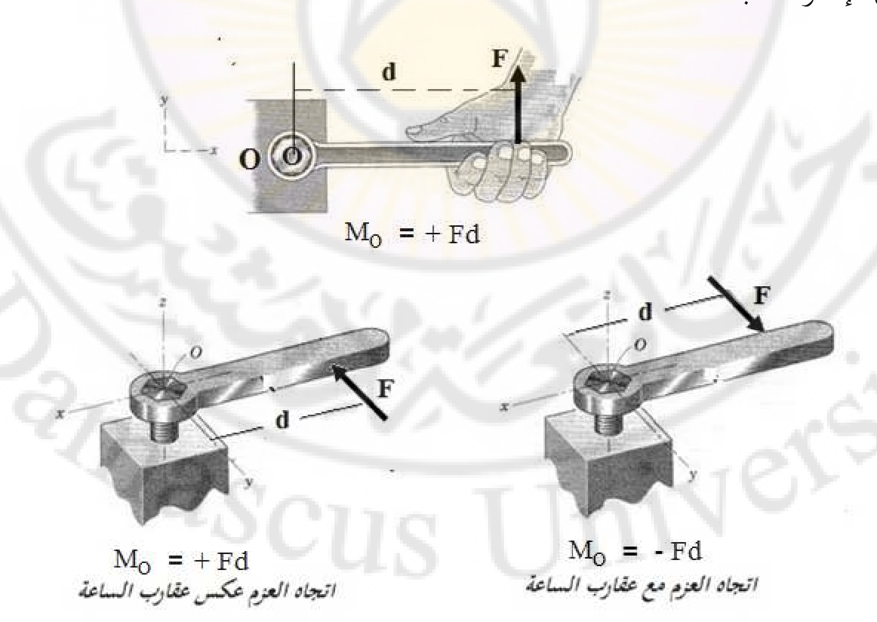
$$F_x = 120\cos 60° = 60\ N\ (\rightarrow)$$
$$F_y = 120\sin 60° = 103.9\ N\ (\uparrow)$$

c) **القوة الثالثة** : إن مسقطي القوة $\mathbf{F}_3$ هما :

$$F_x = -150\cos 45° = -106\ N\ (\leftarrow)$$
$$F_y = 150\sin 45° = 106\ N\ (\uparrow)$$

عزم القوة (Moment of a Force)

تبين التجربة أن الجسم الصلب يمكن أن يتحرك بتأثير قوة ما حركة دائرية حول محور لا يقطع المستقيم الحامل للقوة ولا يوازيه . ويدعى هذا التأثير بعزم القوة أو عزم الدوران . وعندما تكون جميع القوى التي يخضع لها الجسم واقعة في مستو واحد فمن المعتاد أن نقول: العزم حول نقطة ، والمقصود هو العزم حول محور يمر من تلك النقطة وعمودي على مستوي القوى. هذا وينعدم عزم قوة حول نقطة إذا وقعت النقطة على المستقيم الحامل للقوة .كما يبقى عزم قوة حول نقطة ما ثابتاً مقداراً واتجاهاً إذا انزلقت القوة على خط عملها. وقد جرت العادة أن نعتبر العزم موجباً إذا كانت القوة تحاول تدوير الجسم حول نقطة ما في اتجاه معاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة،وان نعتبره سالباً عندما تحاول القوة تدوير الجسم في اتجاه دوران عقارب الساعة.وهكذا يكون لعزم القوة F_1 بالنسبة إلى النقطة المبينة في الشكل(1-9) إشارة موجبة ،ولعزم القوة F_2 بالنسبة إلى النقطة نفسها إشارة سالبة.



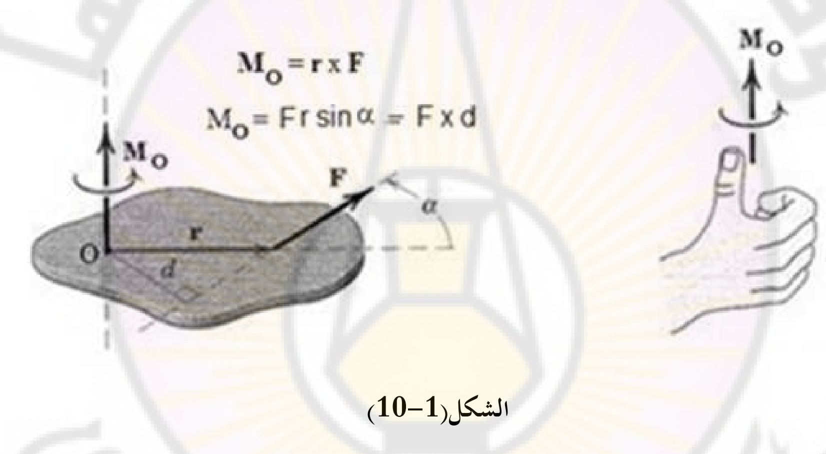
الشكل(1-9)

ويقاس هذا العزم بجداء مقدار القوة في البعد بين تلك النقطة وحامل القوة، أي أن :

$$M_O = F \times d \qquad (6)$$

إن الوحدة الأساسية للعزم في نظام الوحدات الدولي SI هي نيوتن–متر (N.m) وفي النظام الأمريكي هي رطل–قدم (lb-ft) .

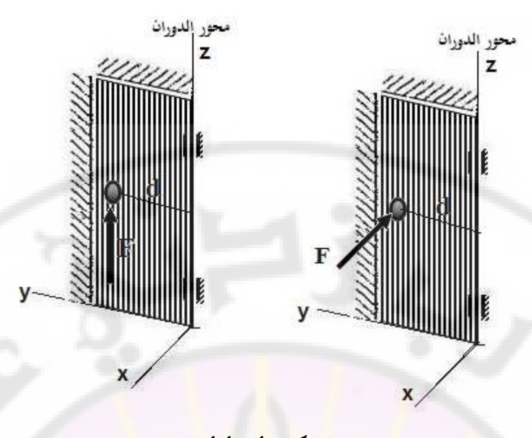
في التطبيقات الهندسية نمثّل عادة عزم قوة ما **F** بالشعاع **M** العمودي على مستوي الجسم والذي يتحدد اتجاهه باستخدام قاعدة اليد اليمنى ، حيث يشير الإبهام إلى اتجاه الشعاع وثني بقية الأصابع يدل على اتجاه الدوران كما هو مبين في الشكل(1–10).



الشكل(1–10)

وفي حالة القوى الواقعة في مستو واحد يمكن تمثيل العزم بسهم منحنٍ فقط والاستغناء عن الشعاع المستقيم ، طالما أن الشعاع يكون خارجاً من مستوي الرسم (الدوران بعكس عقارب الساعة) أو داخلاً إليه (الدوران مع عقارب الساعة).

يجب أيضاً أن نوضح بعجالة مفهوم عزم القوة حول محور حتى يتسنى لنا الانتقال إلى حل مسائل مجموعات القوى الفراغية .ليكن لدينا الباب المبين في الشكل(1–11) ولتكن F قوة ما تؤثر في مقبض الباب. من الملاحظ انه إذا كانت القوة واقعة في مستوي الباب فإنها لن تؤدي إلى فتحه ، بينما إذا كانت هذه القوة عمودية على مستوي الباب فإنها تستطيع فتح الباب بتدويره حول المحور Z . ينتج مما تقدم :



الشكل(1–11)

- إذا كانت القوة موازية للمحور فإن عزمها حول هذا المحور يساوي صفراً.
- إذا كان حامل القوة يقطع المحور فإن عزمها حول هذا المحور يساوي صفراً أيضاً.
- إذا كان اتجاه القوة عمودياً على المحور فإن عزمها حوله يساوي جداء مقدار القوة في البعد بين القوة والمحور .

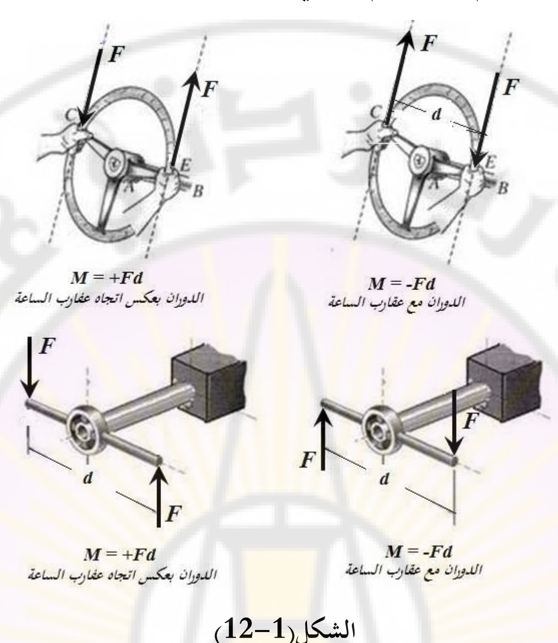
قاعدة العزوم : تعدّ قاعدة العزوم والمسمّاة بقاعدة فارغنون (Varignon Theorem) من القواعد الأساسية في علم التوازن ، وتقول : إن عزم قوة ما حول نقطة يساوي مجموع عزوم مُركّبات تلك القوة حول النقطة نفسها.

عزم المزدوجة (Moment of Couple)

المزدوجة هي عبارة عن قوتين متوازيتين ومتساويتين تعملان في اتجاهين متضادين . ويدعى مستوي القوتين المؤثرين في جسم ما بمستوي تأثير المزدوجة ، بينما تدعى المسافة العمودية الفاصلة بين القوتين بذراع المزدوجة.كما يسمى العزم الناتج عن جداء إحدى قوتي المزدوجة بطول ذراعها بعزم المزدوجة . ويعتبر عزم المزدوجة موجباً إذا عملت المزدوجة على تدوير الجسم بعكس دوران عقارب الساعة كما في الشكل(1–12) ، وسالباً إذا عملت على تدوير الجسم بنفس اتجاه دوران عقارب الساعة ،وعند ذلك يكون :

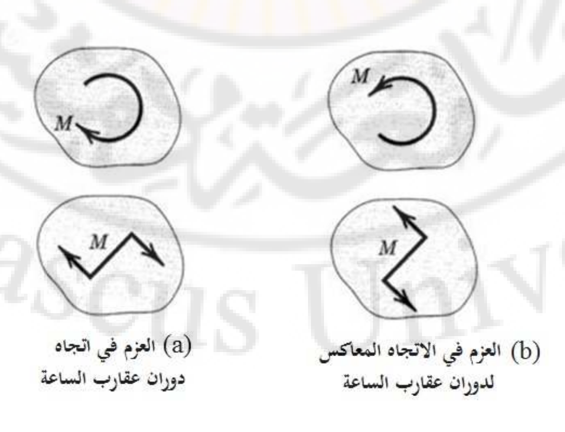
$$M = \pm F \times d \qquad (7)$$

ويقاس عزم المزدوجة بنفس وحدات قياس عزم القوة أي بوحدة نيوتن–متر (N.m) والتي تمثل الوحدة الأساسية للعزم في النظام الدولي الخاص بوحدات القياس.



الشكل(1–12)

يوضح الشكل(1–13) كيفية تمثيل المزدوجة في التطبيقات الهندسية ، وينبغي عدم الخلط بين مفهوم عزم القوة ومفهوم عزم المزدوجة .فمفهوم عزم القوة يتعلق بالنقطة التي يؤخذ بالنسبة لها العزم ، أما عزم المزدوجة فلا يتعلق مقداره بأية نقطة في المستوي .



الشكل(1–13)

ومن الخصائص الأساسية للمزدوجة أنه يمكن نقلها من المستوي الواقعة فيه إلى أي مستوٍ آخر يوازيه دون أن يغير ذلك من عزم المزدوجة. ومن القواعد المهمة كما هو واضح في الشكل(1–14) انه يمكن نقل أية قوة تؤثر في جسم ما نقلاً موازياً إلى أية نقطة أخرى من الجسم دون إحداث أي تغيير في تأثيرها عليه ، شريطة إضافة مزدوجة عزمها يساوي عزم القوة المنقولة بالنسبة إلى النقطة التي نقلت إليها. ويتضح هذا من الشكل الذي يتضمن إضافة قوتين متساويتين ومتعاكستين في الاتجاه في النقطة B . نلاحظ هنا بأن القوة الأصلية التي تؤثر في النقطة A ، والقوة المعاكسة لها والتي تؤثر في النقطة B ، تشكلان معاً مزدوجة عزمها M=Fd وجهتها بعكس دوران عقارب الساعة. وبناءً على ما سبق يجوز تحويل جملة مؤلفة من قوة ومزدوجة إلى قوة واحدة فقط وذلك إذا عكسنا الخطوات السابقة .إن عملية الاستبدال هذه تتكرر بكثرة في التطبيقات الهندسية .



الشكل(1–14)

مثال رقم (2)

أوجد عزم القوة المعلومة **F** المؤثرة في الذراع OA بالنسبة للنقطة O كما هو موضح في الشكل المرافق .



الحل : ....

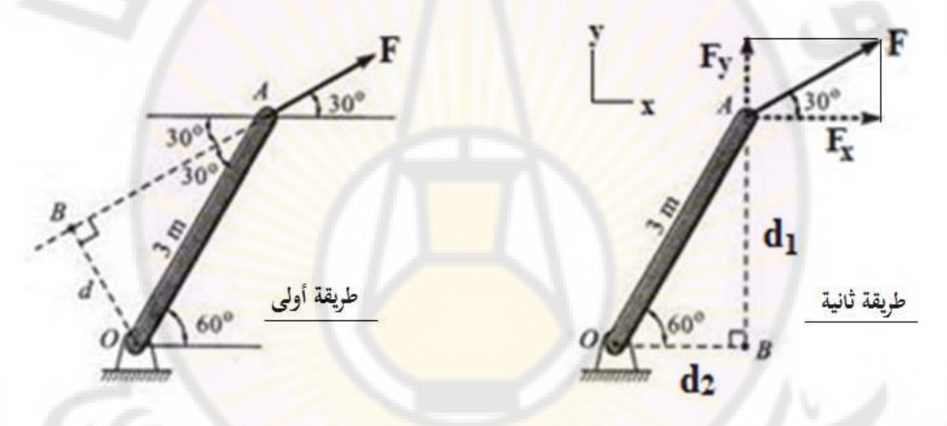
طريقة أولى :نُسقط عموداً من النقطة O على حامل القوة **F** فنحصل على ذراع العزم والذي يحسب كما يلي :

$$d = 3 \sin30° = 1.5 \text{ m}$$

ويتعين عزم القوة المفروضة بالعلاقة :

$$M_o = - F \times d$$
$$M_o = - 50 \times 1.5 = - 75 \text{ N.m}$$

تدل الإشارة السالبة على أن القوة تحاول إحداث دوران باتجاه عقارب الساعة.



طريقة ثانية : نحلل القوة **F** إلى مركبتين متعامدتين ثم نستخدم مبرهنة فارغنون فيكون:

$$M_o = M_1 + M_2$$
$$M_1 = - F_x \times d_1$$
$$M_2 = + F_y \times d_2$$

وبالتعويض نحصل على :

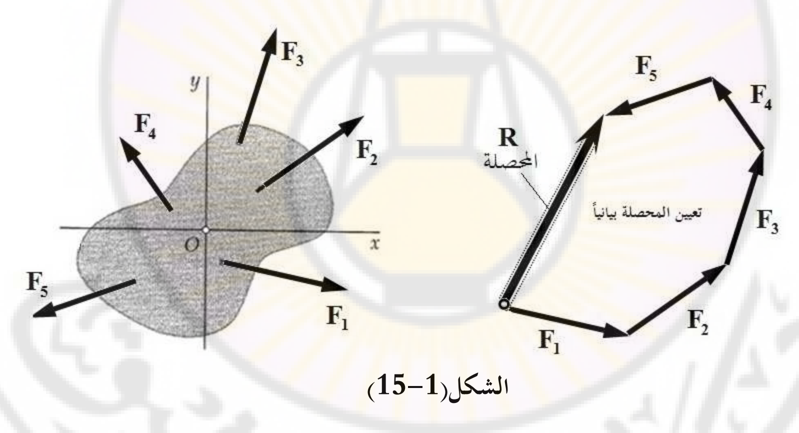
$$M_1 = - 50 \cos 30 \times 3 \sin 60 = -112.5 \text{ N.m}$$
$$M_2 = +50 \sin 30 \times 3 \cos 60 = 37.5 \text{ N.m}$$
$$M_o = M_1 + M_2 = -112.5+37.5 = -75 \text{ N.m}$$

نلاحظ أننا حصلنا على النتيجة السابقة نفسها.

3–1 محصلات القوى (Resultants of force systems) :

الطريقة البيانية :

تتلخص الطريقة البيانية التي تحدد محصلة مجموعة من القوى في الآتي : ليكن لدينا مجموعة القوى **($F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,...$)** المطبقة في عدة نقاط من الجسم المبين في الشكل (1–15) . نختار نقطة ما من المستوي ثم نقوم بجمع كل القوى بصورة شعاعية واحدة تلو الأخرى بمقياس رسم مناسب مع مراعاة اتجاهات القوى فنحصل على خط منكسر يسمى مضلع القوى . يمثل عندئذ الشعاع الذي يغلق مضلع القوى المحصلة **R** قيمة واتجاهاً . وبما أن تعيين المحصلة بهذه الطريقة يصبح عملاً شاقاً إذا كانت هذه القوى كثيرة العدد لذا يفضل استخدام الطريقة التحليلية نظراً لبساطتها.



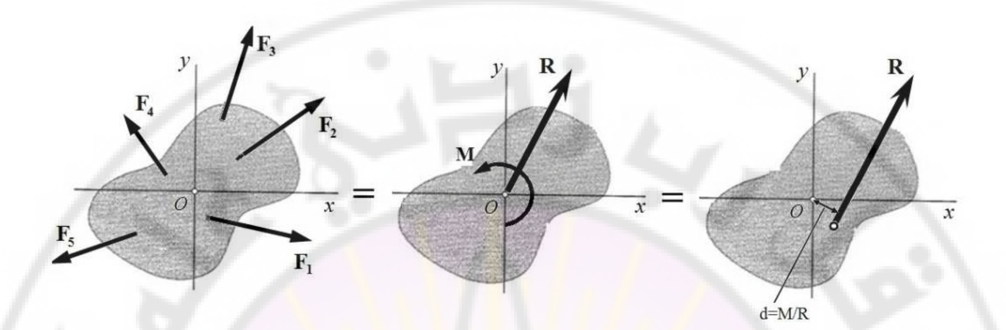
الشكل(1–15)

الطريقة التحليلية :

إن تعيين محصلة مجموعة من القوى قيمة واتجاهاً وفق هذه الطريقة يتطلب أولاً اختصار مجموعة القوى هذه إلى جملة مكافئة لها ولكنها أبسط منها بحيث تتألف فقط من قوة ومزدوجة ، وتسمى هذه العملية عادةً بعملية اختزال أو اختصار القوى .

وللقيام بعملية الاختزال نتصور جسماً صلباً يقع تحت تأثير مجموعة من القوى غير المتلاقية في نقطة واحدة ولتكن **$F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,...$**. ثم نختزل هذه المجموعة كما يظهر الشكل (1–16) إلى جملة مكافئة لها تؤثر في نقطة مناسبة إحداثياتها معلومة

كمبدأ الإحداثيات o. تتألف هذه الجملة من القوة المحصلة **R** التي تؤثر في النقطة o ومزدوجة عزمها **M** ، ولحسابهما تستخدم العلاقات الآتية:



الشكل(1–16)

$$R = \sqrt{(\Sigma\, F_X)^2 + (\Sigma\, F_Y\,)^2} \qquad (8)$$

$$M = \sum M_o \qquad (9)$$

حيث :

$\Sigma\, F_X$ و $\Sigma\, F_Y$: المجموعان الجبريان لمساقط القوى على المحورين x و y .

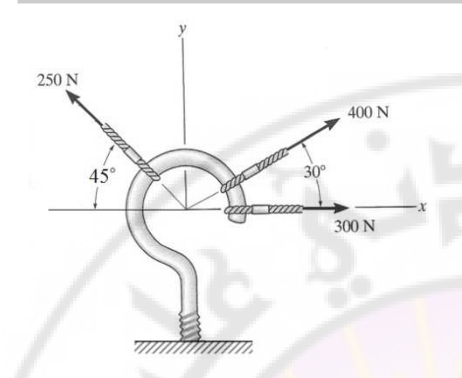
$\Sigma\, M_O$ المجموع الجبري لعزوم قوى المجموعة بالنسبة للنقطة المختارة o .ويسمى العزم M عادة بعزم المحصلة .

وتأسيساً على ما سبق ، يمكننا الانتقال من عملية الاختزال إلى تحويل مجموعة القوى إلى القوة المحصلة **R** فقط كما هو مبين في الشكل المذكور آنفاً ، وذلك بتطبيق قاعدة العزوم التي تقول: إن عزم المحصلة بالنسبة إلى أي نقطة يساوي المجموع الجبري لعزوم قوى المجموعة بالنسبة إلى النقطة نفسها.فإذا ما حصلنا على عزم المحصلة بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات أمكننا الحصول على ذراعها d كما يلي :

$$R \times d = \sum M_o \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\sum M_o}{R} = \frac{M}{R} \qquad (10)$$

مثال رقم (3)

أوجد محصلة جملة القوى المتلاقية المؤثرة في رأس المسمار الموضح في الشكل المجاور .



الحل : ....

نحسب المجموع الجبري لمساقط القوى على كل من محوري جملة الإحداثيات :

$$\sum F_x = 300 + 400\cos 30° - 250\cos 45° = 470\ N$$

$$\sum F_y = 400\sin 30° + 250\sin 45° = 378\ N$$

وبالتعويض في العلاقة الآتية نحصل على مقدار المحصلة :

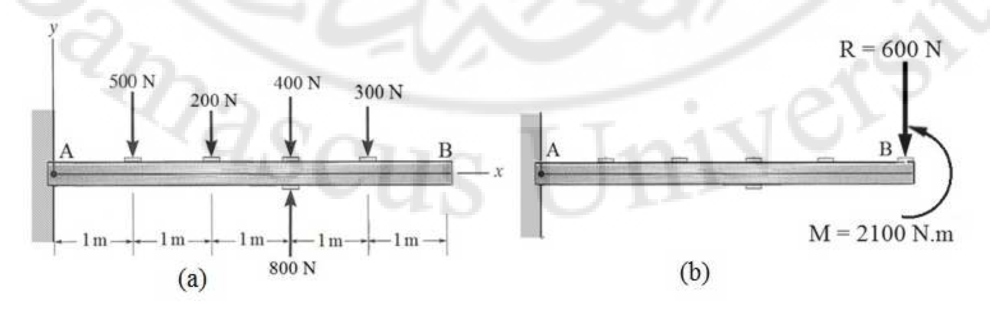
$$R = \sqrt{(\Sigma\, F_X)^2 + (\Sigma\, F_Y\,)^2} = 603\ N$$

ولتعيين اتجاه هذه القوة نحسب زاوية ميلها θ فينتج أن :

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{378}{470}\right) = 38.8°$$

مثال رقم (4)

تؤثر جملة من القوى المتوازية في الجائز الموضح في الشكل المرافق (a). والمطلوب استبدل جملة القوى المعطاة بجملة مكافئة عند النقطة B .



الحل : ....

تتألف الجملة المكافئة المطلوبة من القوة **R** التي تؤثر في النقطة B ، ومزدوجة عزمها **M** .

ولحساب هذه القوة نستخدم جملة الإحداثيات المبينة في الشكل ، ثم نطبّق العلاقة :

$$R = \Sigma F_y = 800 - 500 - 200 - 400 - 300 = -600 \text{ N}$$

تدلّ إشارة السالب على أن اتجاه القوة **R** هو نحو الأسفل ، أي أن :

$$R = 600 \text{ N} (\downarrow)$$

ولحساب العزم **M** بالنسبة للنقطة B نستخدم العلاقة :

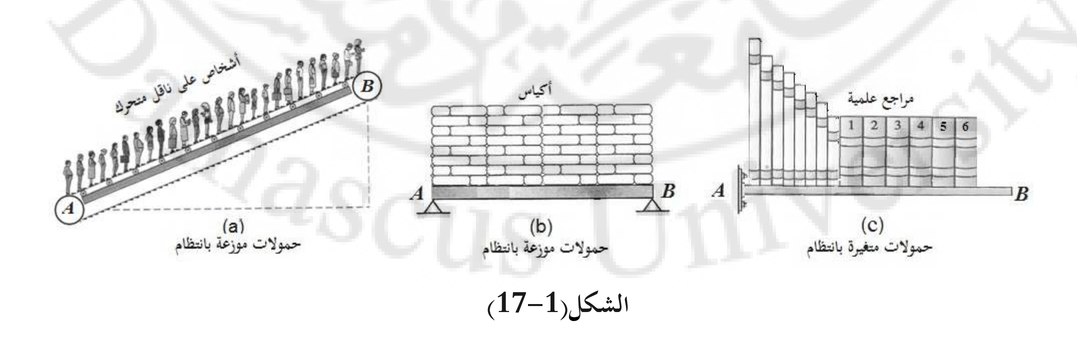
$$M = \Sigma M_B = 500(4) + 200(3) + 400(2) + 300(1) - 800(2)$$

$$M = +2100 \text{ N.m} (\curvearrowleft)$$

تدلّ الإشارة الموجبة على أن اتجاه العزم **M** هو بعكس دوران عقارب الساعة . وبناءً على هذه النتائج نستطيع الآن اختزال مجموعة القوى المعطاة إلى جملة مكافئة لها تؤثر في النقطة B كما هو واضح في الشكل (b) .

محصلات القوى الموزعة (Resultants of Distributed Forces)

كثيراً ما نصادف في الحسابات الهندسية حمولات موزّعة على سطح ما حسب هذا القانون أو ذاك كما هو مبين في الشكل(1–17) . ونميّز المجموعة المستوية من القوى الموزعة عادة بشدة إجهادها q ، أي بمقدار القوة المؤثرة في وحدة الطول من السطح المحمَّل . وتقاس شدة الإجهاد q بوحدة القياس الدولية N/m .



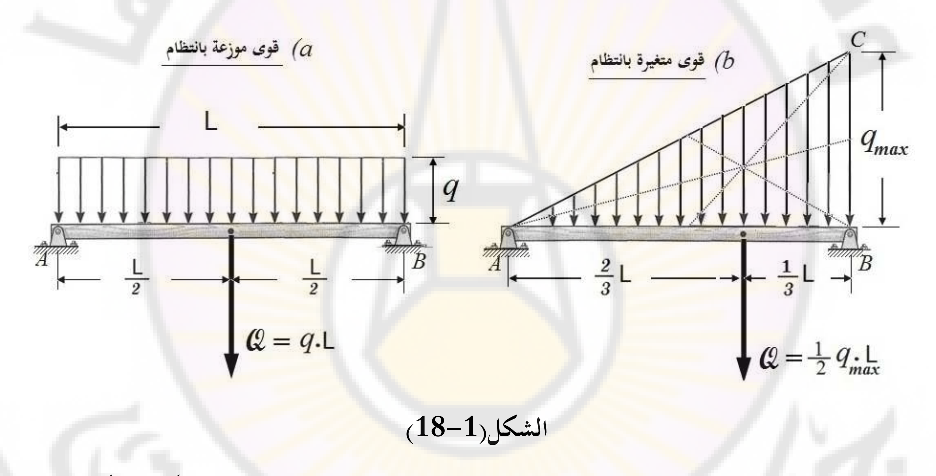
الشكل(1–17)

يوضح الشكل (1–18) كيفية تحديد المحصلة لبعض أشكال القوى الموزعة الواقعة في مستو واحد .

القوى الموزعة بانتظام : تكون شدة الإجهاد q لمثل هذه المجموعة مقداراً ثابتاً.ويمكن عند الحسابات أن نستبدل تأثير هذه المجموعة بتأثير محصلتها **Q** التي تحسب بالعلاقة:

$$Q = q \times L \qquad (11)$$

وتؤثر هذه القوة في منتصف الجائز AB كما هو مبين في الشكل.



الشكل(1–18)

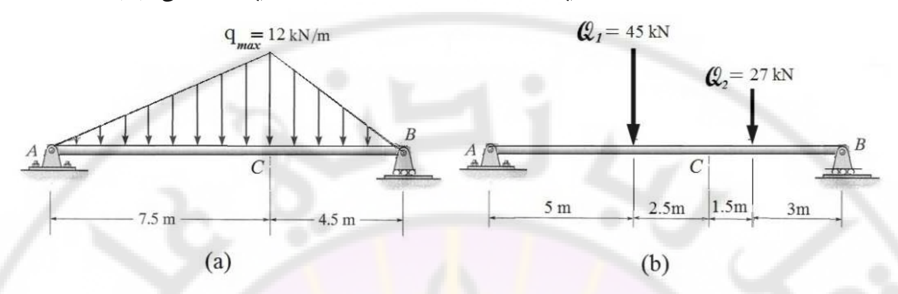
القوى المتغيرة بانتظام : تكون شدة الإجهاد q لمثل هذه المجموعة مقداراً متغيراً يزداد من الصفر حتى نهاية عظمى q_{max} . وعند إجراء الحسابات نستبدل تأثير هذه المجموعة بتأثير محصلتها Q والتي تتحدد بمساحة المثلث الذي تشكله ، وعليه تحسب هذه المحصلة بالعلاقة :

$$Q = \frac{1}{2}\, q_{max} \times L \qquad (12)$$

إن خط تأثير هذه المحصلة يجب أن يمر من مركز ثقل المثلث والذي يقع في نقطة تلاقي متوسطاته . ولهذا فهو يبعد بثلث المسافة L عن الضلع BC كما هو مبين في الشكل .

مثال رقم (5)

أوجد محصلة القوى الموزعة المؤثرة في الجائز البسيط AB المبين في الشكل (a) .



الحل : ....

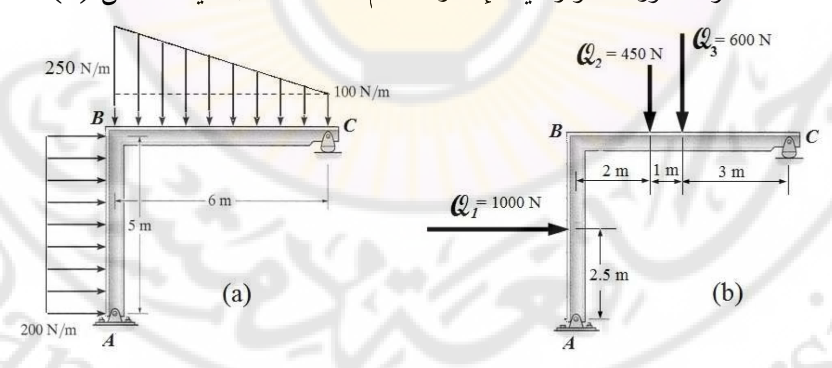
نستبدل مجموعة القوى الموزعة كما هو مبين في الشكل (b) بالمحصلتين الآتيتين :

$$Q_1 = \frac{1}{2} \times 12 \times 7.5 = 45\ kN$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \times 12 \times 4.5 = 27\ kN$$

مثال رقم (6)

أوجد محصلة القوى الموزعة المؤثرة في الإطار القائم ABC المبين في الشكل (a) .



الحل : ....

نستبدل مجموعة القوى الموزعة كما هو مبين في الشكل (b) بالمحصلات الآتية :

$$Q_1 = 200 \times 5 = 1000\ N$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \times 150 \times 6 = 450\ N$$

$$Q_3 = 100 \times 6 = 600\ N$$

1–4 القيود وردود أفعالها (Constrains and their Reactions)

لدراسة توازن جسم ما نحدد أولاً شكل القوى المؤثرة فيه .وهنا يجب أن نميز بين القوى الخارجية المسلطة على الجسم والقوى المعروفة بردود أفعال القيود. وتشير التجارب إلى أن ردّ الفعل هو قوة يكون اتجاهها بصورة عامة معاكساً لاتجاه الحركة المحتملة للجسم المقيد إذا لم تتحقق شروط التوازن . ويبين كلّ من الشكلين (1–19)و(1–20) كيفية تحديد ردود الأفعال في الأنواع المختلفة للمساند والقيود التي تصادفنا في المسائل والتطبيقات الهندسية ، وتشمل الآتي :

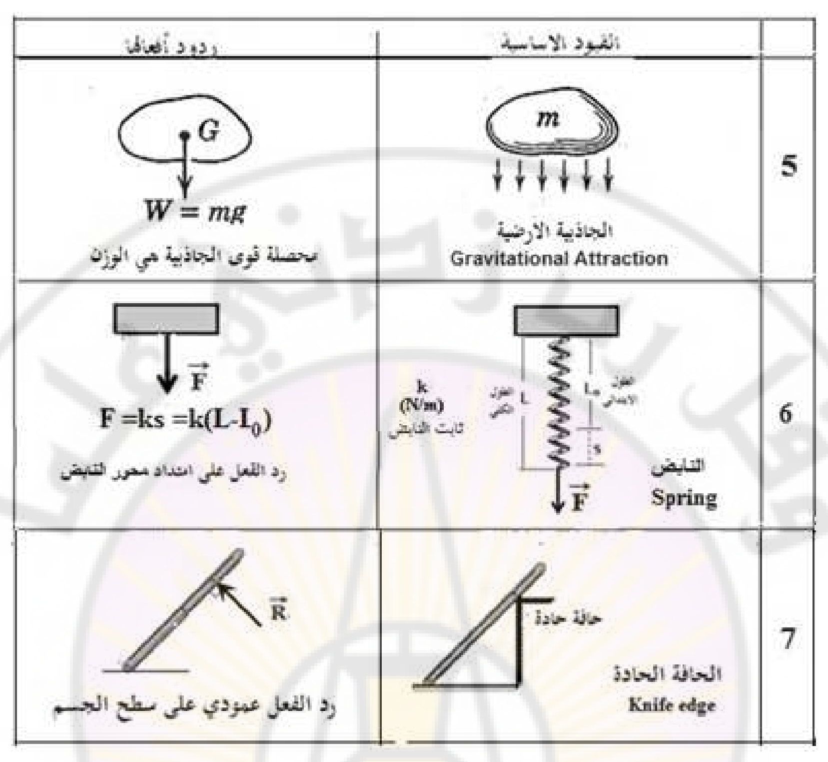
1. الحبال (Ropes) والأسلاك (Wires) والسلاسل(Chains) والقضبان الخفيفة (مهملة الوزن) : عندما يقيد جسم بحبل أو سلك أو سلسلة فإن ردّ الفعل هو قوة على امتداد القيد.
2. السطح الأملس والمسند المتحرك (Smooth surface & Roller support) : عندما يستند جسم إلى سطح أملس فإن ردّ الفعل يكون عمودياً على سطح الاستناد في نقطة التماس . وعندما يقيد جسم بمسند متحرك أيضاً فإن ردّ الفعل هو قوة عمودية على سطح الاستناد.
3. المسند المفصلي الثابت (Pin support) : عندما يقيد جسم بمسند مفصلي ثابت فإن ردّ الفعل يكون مجهول الاتجاه لذا يحلل إلى مركبتين باتجاه المحاور الإحداثية.
4. المسند الصلب الثابت (Fixed support) : عندما يثبت طرف جسم بشكل صلب ، بعملية اللِّحام مثلاً ، فإن ردّ الفعل يكافئ قوة R ومزدوجة ذات عزم M . كما أن القوة المذكورة مجهولة الاتجاه لذا يمكن تحليلها إلى مركبتين متعامدتين .
5. الجاذبية الأرضية (Gravitational Attraction) : إن محصلة قوى الجاذبية الأرضية المؤثرة في جسم صلب هي قوة وحيدة تسمى وزن الجسم W وتتجه رأسياً للأسفل وتمر من مركز ثقل الجسم .

6. النوابض (Springs) : عندما يقيد جسم بنابض فإن ردّ الفعل هو قوة على امتداد محور ذلك النابض . وتحسب قوة النابض عادة بالعلاقة الموضحة في الشكل(1–20).حيث k يمثل ثابت النابض (Spring constant) ويقدر بوحدة N/m ، أما s فتمثل التغير(Deformation of the spring) الذي يطرأ على طول النابض بفعل قوة الشد أو الضغط المؤثرة فيه.

7. الحواف الحادة (Knife Edges) : عندما يستند جسم إلى حافة حادة فإن ردّ الفعل هو قوة عمودية على سطح الجسم.

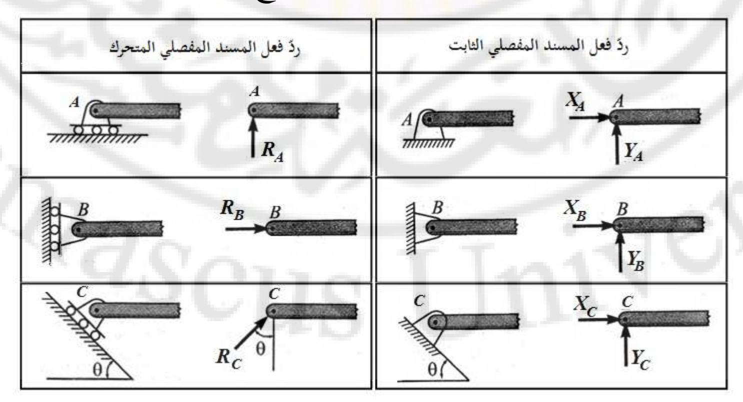
	القيود الأساسية	ردود أفعالها
1	θ سلك أو كبل أو حبل أو قضيب مهمل الوزن Wire or Cable or Rope or Light bar	$\vec{T}$ θ رد الفعل على امتداد القيد
2	السطح الأملس Smooth surface المسند المتحرك Roller support	y x $\vec{R}_y$ رد الفعل عمودي على سطح الاستناد
3	السطح الخشن Rough surface المسند المفصلي الثابت Pin support	$\vec{R}_x$ $\vec{R}_y$ أو $\vec{R}$ θ رد الفعل مجهول الاتجاه لذا يحلل الى مركبتين
4	A Welded المسند الصلب الثابت Fixed support	$\vec{R}_x$ A M $\vec{R}_y$ رد الفعل يتألف من قوة ومزدوجة واتجاه كل منهما مجهول

الشكل(1–19)



الشكل(1–20)

خلاصة القول ، يتوقف اتجاه ردّ الفعل على طريقة ارتكاز الجسم ، وتُعدّ المساند المفصلية الثابتة والمتحركة من أن أكثر أنواع المساند انتشاراً في الحياة العملية.ولهذا يبين الشكل(1-21) كيفية تمثيل اتجاه ردّ الفعل في الأوضاع المختلفة لتلك المساند .



الشكل(1–21)

أسئلة نظرية للمراجعة

REVIEW QUESTIONS

أجب عمّا يأتي :

1. عرّف المفاهيم الآتية :

الجسم الصلب – الجُسَيم المادي – الجائز البسيط– الكتلة – الوزن – القوة – المزدوجة

2. ما الفرق بين المقادير العددّية (السُلَّمية) والمقادير الشعاعية (المتّجهات) ؟ أعطِ أمثلة عليها .
3. ماذا يقول قانون التجاذب العام ؟
4. اشرح بإيجاز مبدأ التوازن الديناميكي مبيناً المقصود بقوة عطالة الجسم .
5. ما المقصود بعزم القوة ؟ وضّح كيفية تمثيله بشعاع باستخدام قاعدة اليد اليمنى .
6. ماذا تقول قاعدة العزوم المسمَّاة بقاعدة فارغنون ؟
7. اشرح الطريقة البيانية التي تحدد محصلة مجموعة من القوى المستوية المؤثرة في جسم صلب .

اختر الإجابة الصحيحة لكلّ ممّا يأتي :

1. يبحث علم السكون (علم التوازن) في اتزان :

a) الأجسام الساكنة . b) الأجسام التي تتحرك حركة منتظمة. c) كُلّ ما سبق صحيح .

2. إنّ عزم القوة حول محور يساوي صفراً إذا كان :

a) اتجاه القوة موازياً لمحور الدوران . b) اتجاه القوة قاطعاً لمحور الدوران .

c) كُلّ ما سبق صحيح .

3. عندما تؤثر في جائز طوله ℓ قوى موزعة بانتظام شدتها q فإن محصلتها تساوي :

a) $q.\ell$ b) $q.\ell^2$ c) $q.\ell^3$

4. إن اتجاه رد فعل المسند المفصلي الثابت في حالة القوى المستوية يكون :

a) أفقياً . b) عمودياً على سطح الاستناد. c) مجهولاً ويُحلَّل عادة إلى مركبتين.

5. إن اتجاه رد فعل المسند المفصلي المتحرك في حالة القوى المستوية يكون :

a) أفقياً . b) عمودياً على سطح الاستناد. c) مجهولاً.

6. يتألف رد فعل المسند الصلب في حالة القوى المستوية من :

a) قوة ومزدوجة . b) قوة مجهولة فقط. c) مزدوجة مجهولة فقط .

الفصل الثاني

توازن القوى المستوية

EQUILIPRIUM 0F COPLANAR FORCES

1-2 معادلات التوازن (Equations of Equilibrium) :

إذا كان الجسم ساكناً أو متحركاً بسرعة خطية ثابتة فإن تسارعه يكون معدوماً ، ونقول عندئذ : إن هذا الجسم واقع في حالة توازن أو اتزان . كما أن مجموعة القوى التي تؤثر في الجسم ولا تغير من حالته تدعى بالمجموعة المتوازنة . وبتعبير آخر إذا أثرت في جسم ما مجموعة قوى متوازنة ، فإننا نقول إن هذه القوى تقع في حالة توازن. وبالعودة إلى القانون الأول لنيوتن فإن الجسم يكون متوازناً عندما تساوي محصلة القوى المؤثرة فيه صفراً . وبما أننا نستطيع على وجه العموم اختزال أية مجموعة من القوى الى جملة مكافئة تتألف من قوة تساوي $\Sigma \mathbf{F}$ ومزدوجة عزمها يساوي $\Sigma \mathbf{M_o}$ بالنسبة لنقطة اختيارية كمركز الإحداثيات مثلاً ، عندئذ نحصل على معادلات التوازن بصيغتها الشعاعية الآتية :

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

$$\Sigma \mathbf{M_o} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

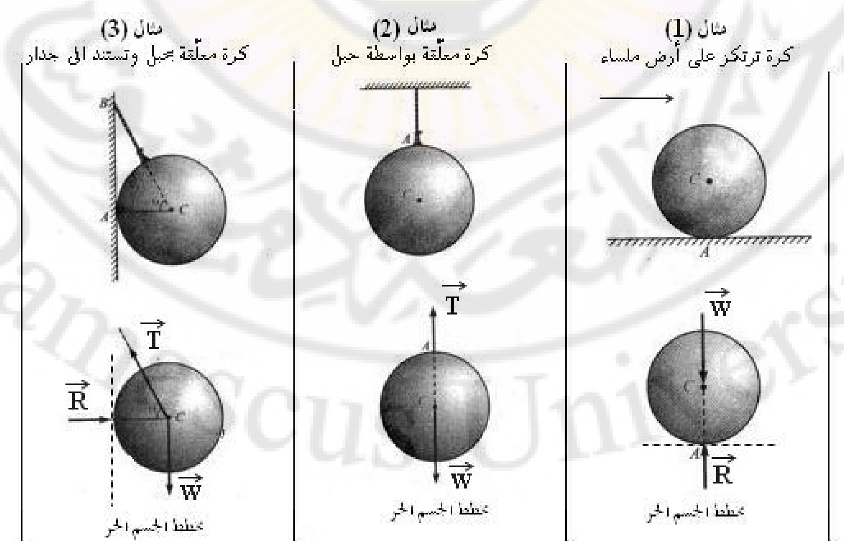
حيث :

Σ **F** - المجموع الشعاعي لقوى المجموعة المفروضة.

Σ**M** - المجموع الشعاعي لعزوم كل قوى المجموعة المفروضة بالنسبة لأية نقطة مناسبة.

مخطط الجسم الحر: ينبغي قبل أن نبدأ بتطبيق معادلات التوازن عزل الجسم الوارد في المسألة بطريقة واضحة وأن نمثل بدقة جميع القوى المؤثرة فيه ، إذ يؤدي حذف قوة ما أو إضافتها إلى نتائج خاطئة. وتتم عملية عزل الجسم عن جميع الأجسام والقيود المحيطة به من خلال رسم مخطط الجسم الحر أو الطليق (Free Body Diagram) الذي يُظهر جميع القوى المؤثرة بما في ذلك قوى ردود أفعال القيود التي أبعدت عنه . ولا يجوز البدء بحسابات القوى إلا بعد إتمام رسم مخطط الجسم الحر ، ولهذا فإن **رسم مخطط الجسم الحر هو أهم خطوة في حل مسائل علم التوازن** .

للبحث مثلاً في توازن الكرة المبينة في المثال الأول في الشكل(2–1) ، نقوم أولاً برسم مخطط الجسم الحر لتلك الكرة . لهذا ننزع عنها السطح الحامل ونحل محله رد فعل السطح في الكرة أي القوة **R** ، ونعلم أن نقطة تطبيق هذه القوة يجب أن تقع في A نقطة



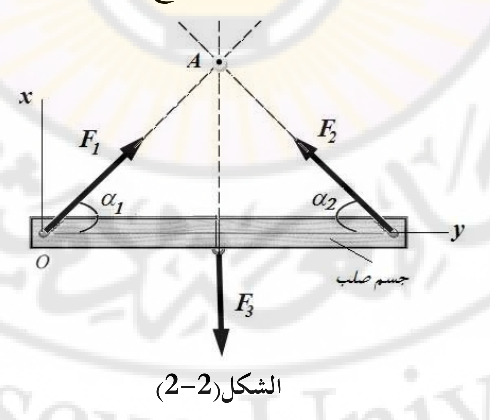
الشكل(2–1)

Damascus University

التماس بين المستوي والكرة ، فنستنتج ، استناداً إلى مبدأ توازن قوتين أنه يجب أن يكون رد الفعل **R** شاقولياً ومساوياً للوزن **W** ، وبذلك يكون رد الفعل هذا قد تعيّن تعييناً كاملاً. وكذلك في حالة الكرة المعلقة بحبل والمبينة في المثال الثاني في الشكل السابق ، إذا نزعنا الحبل هنا وعزلنا الكرة كجسم حر كانت لدينا ، بالإضافة إلى الوزن **W** المطبق في النقطة C ، قوة شد الحبل **T** . لهذا يظهر مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل المذكور آنفاً .وكذلك في حالة الكرة المبينة في المثال الثالث ، إذا نزعنا القيود هنا أيضاً وعزلنا الكرة كجسم حر كانت لدينا ، بالإضافة إلى الوزن المطبق في النقطة C ، قوتا رد فعل تحل إحداهما محل الحبل وتحل الأخرى محل الجدار . لهذا يظهر مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل. ومن المعتاد عند تطبيق معادلات التوازن على الأجسام الصلبة هو تقسيم مجموعات القوى المؤثرة فيها إلى متلاقية ومتوازية ومتفرقة .

2–2 القوى المتلاقية (Concurrent Forces) :

عندما تؤثر جملة قوى متلاقية في جسم ، فإن ذلك يعني تلاقي خطوط تأثير هذه القوى في نقطة واحدة ،كالنقطة A مثلاً ،كما هو واضح في المثال المبين في الشكل (2–2).



الشكل(2–2)

ويكفي في هذه الحالة لانعدام هذه الجملة هو أن تنعدم قوة المحصلة **R** . ويمكن التعبير عن هذا الشرط بالعلاقات الآتية :

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0$$

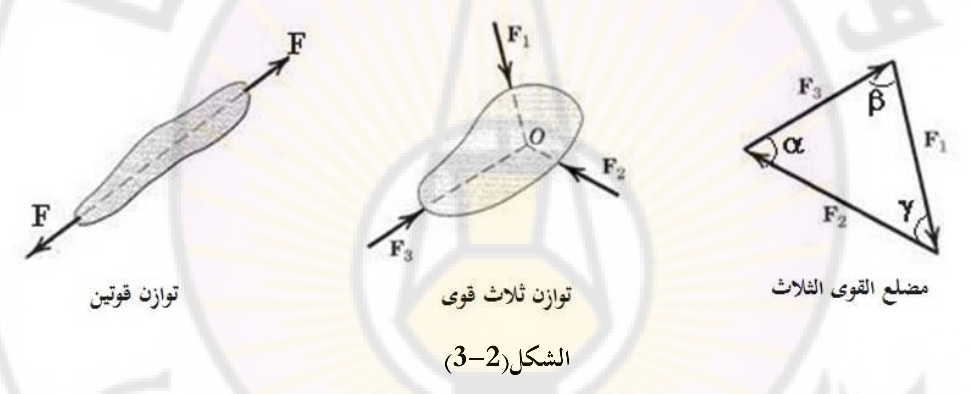
حيث : ΣF_x - مجموع مساقط القوى على محور الإحداثيات x .

ΣF_y - مجموع مساقط القوى على محور الإحداثيات y .

نطبق شرطي التوازن على جملة القوى المتلاقية المبينة في الشكل فنجد :

$$\Sigma F_x = F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2 = 0$$
$$\Sigma F_y = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 - F_3 = 0$$

توازن ثلاث قوى واقعة في مستو واحد : عندما يكون الجسم واقعاً تحت تأثير قوتين فقط فإن توازنه يتطلب تساوي هاتين القوتين في المقدار وتعاكسهما في الاتجاه كما هو مبين في الشكل(2-3) .



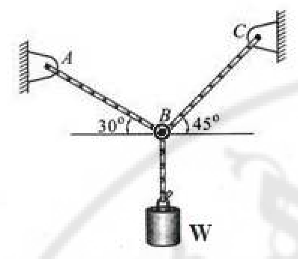
الشكل(2-3)

وعندما تكون القوى المؤثرة فيه ثلاث قوى فإن شرط التوازن هو أن يكون مجموع أي قوتين مساوياً ومعاكساً للقوة الثالثة . أو بمعنى آخر إذا كانت لدينا ثلاث قوى $\mathbf{F}_1$ و$\mathbf{F}_2$ و$\mathbf{F}_3$ وكانت هذه القوى واقعة في مستو واحد وغير متوازية فإن شرط التوازن هو أن تتقاطع خطوط تأثيرها في نقطة واحدة . وبالإضافة إلى هذا فإن أشعة القوى يجب أن تشكل مضلعاً مغلقاً. إن مضلع القوى في هذه الحالة هو مثلث زواياه هي المكملة للزوايا بين خطوط عمل القوى.واستناداً إلى قاعدة الجيوب (علاقة لامي) في المثلثات نجد :

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma} \qquad (4)$$

توضح الأمثلة الآتية كيفية دراسة توازن الجسم الصلب تحت تأثير جملة قوى متلاقية .

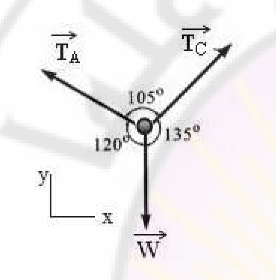
مثال رقم (7)



يتدلى ثقل **W** مقداره 200N من حلقة صغيرة B محمولة بحبلين AB و CB كما هو موضح في الشكل المجاور . أوجد قوة الشد التي تتولد في كل منهما .

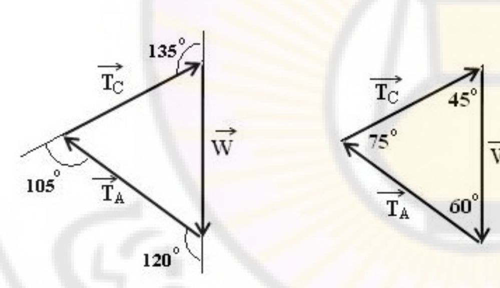
الحل : ....





يمكن حل هذه المسالة بطريقتين ، الأولى بإنشاء مضلع القوى ثم تطبيق علاقة الجيوب ، والثانية بالطريقة التحليلية باستخدام طريقة المساقط.

الطريقة الأولى : ندرس توازن الحلقة B والتي تخضع لتأثير ثلاث قوى متلاقية كما هو مبين في مخطط الجسم الحر لتلك الحلقة . ولما كانت هذه القوى بحالة توازن فإن الأشعة الممثلة لها يجب أن تشكل مثلثاً مغلقاً . وبتطبيق علاقة الجيوب :



$$\frac{W}{\sin 75°} = \frac{T_A}{\sin 45°} = \frac{T_C}{\sin 60°}$$

نجد أن : $T_A = 146.4\ N \quad T_C = 179.3\ N$

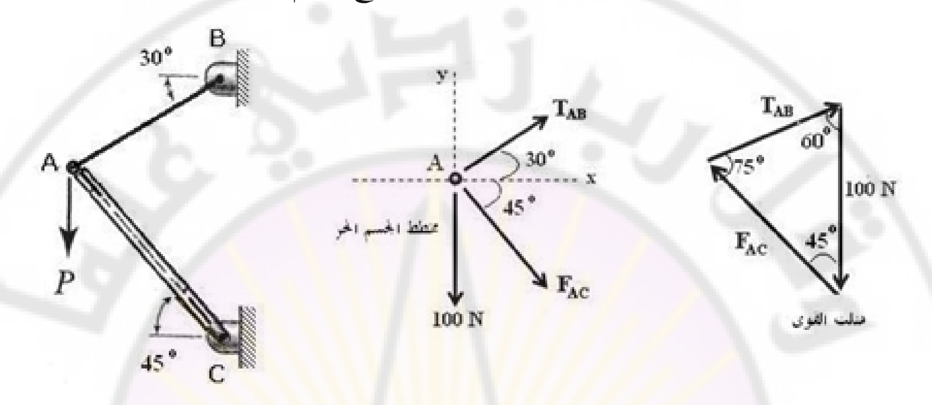
الطريقة الثانية :بالعودة إلى مخطط الجسم الحر للحلقة B وباعتماد جملة محاور إحداثية مناسبة نجد من خلال تطبيق شروط التوازن ما يلي :

$$\Sigma F_x = T_C \cos 45° - T_A \cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = T_C \sin 45° + T_A \sin 30° - W = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على النتيجة السابقة .

مثال رقم (8)

عين في الجملة المبينة في الشكل المبين أدناه القوتين المتولدتين في الكبل AB والذراع AC بفعل القوة الرأسية **P** المطبقة في الحلقة A . مع العلم أن : P =100 N



الحل : ....

عندما تشدّ القوة **P** الحلقة A نحو الأسفل فإن الأخيرة سوف تقوم بضغط ألياف الذراع AC وبشدّ أسلاك الكبل AB.ونتيجة لذلك سوف يؤثر الذراع والكبل في الحلقة بردي فعل مساويين ومعاكسين لفعل الحلقة فيهما كما هو مبين في مخطط الجسم الحر للحلقة.

معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = T_{AB} \cos 30° + F_{AC} \cos 45° = 0$$
$$\Sigma F_y = T_{AB} \sin 30° - F_{AC} \sin 45° - 100 = 0$$

بالتعويض وحل هاتين المعادلتين نحصل على الآتي :

$$T_{AB} = 73{,}2 \text{ N} \qquad F_{AC} = -89.7 \text{ N}$$

الإشارة السالبة تشير إلى أن الاتجاه الفعلي لرد فعل الذراع عكس المفروض في المخطط.

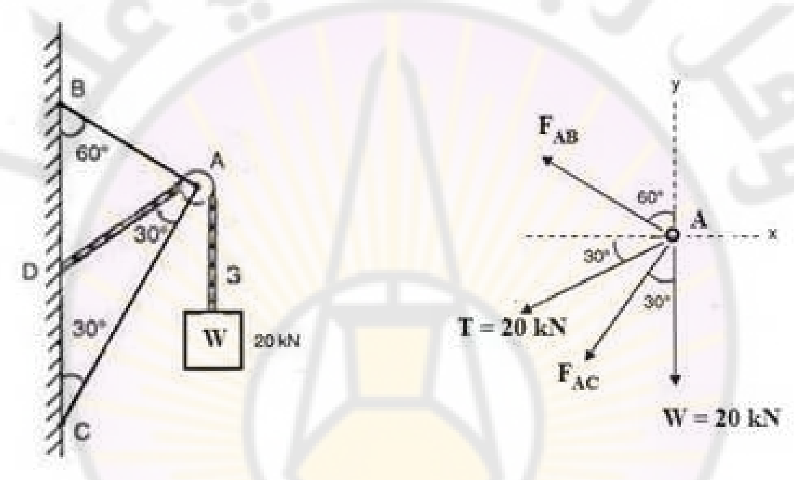
حل آخر : بما أن الحلقة A بحالة توازن وتخضع لتأثير ثلاث قوى فقط لذا فإن الأشعة الممثلة لها يجب أن تشكل مثلثاً مغلقاً كما هو واضح في الشكل. وبتطبيق علاقة الجيوب:

$$\frac{100}{\sin 75°} = \frac{T_{AB}}{\sin 45°} = \frac{F_{AC}}{\sin 60°}$$

من هذه العلاقة نحصل على النتائج السابقة.

مثال رقم (9)

بكرة A مهملة الأبعاد ، ومحمولة على محورين مهملي الوزن ومثبّتين في النقطتين B و C كما هو مبين في الشكل . يلتف على هذه البكرة حبل شُدّت إحدى نهايتيه إلى الجدار وحمّلت النهاية الأخرى بثقل W . المطلوب : (1) ارسم مخطط الجسم الحر للبكرة A . (2) احسب القوتين F_{AB} وF_{AC} المتولدتين في المحورين AB وAC



الحل : ....

بما أن أبعاد البكرة مهملة لصغرها مقارنة ببقية أبعاد المنشأة الهندسية لذا نستطيع اعتبار القوى المؤثرة في البكرة متلاقية . نلاحظ أن السلك يشد البكرة بقوتين يجب أن تكونا متساويتين وهما W وT. كما تخضع البكرة أيضاً لتأثير قوتي ردي فعل منطبقتين على المحورين AB وAC . نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة A ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = F_{AB} \cos 30° + T \cos 30° + F_{AC} \cos 60° = 0$$

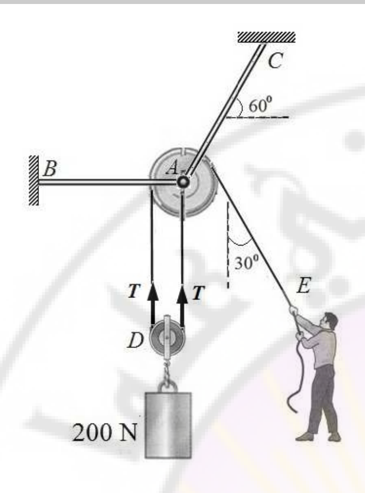
$$\Sigma F_y = F_{AB} \cos 60° - T \cos 30° - F_{AC} \cos 30° - W = 0$$

بالتعويض وحل هاتين المعادلتين نحصل على الآتي :

$$F_{AB} = 0 \quad F_{AC} = - 34.6 \text{ N}$$

مثال رقم (10)

تأمل الشكل المجاور ، ثم أوجد في وضع التوازن ما يلي:



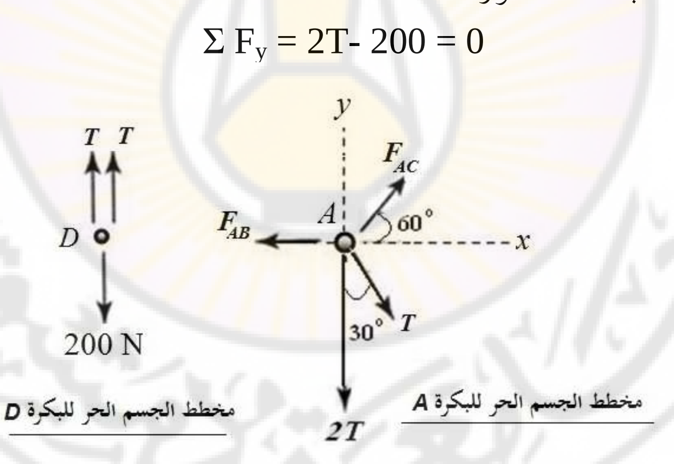
1. قوة الشد T التي تنشأ في الحبل تحت تأثير الثقل المعلّق والذي يساوي 200N .
2. ردّ فعل كلّ من قضيبي التعليق AC وAB .

مع العلم أن أبعاد البكرتين مهملة.

الحل :.................................

نرسم أولاً مخطط الجسم الحر للبكرة D باعتبارها جُسَيْماً مادياً (نقطة) لأنها مهملة الأبعاد ثم نكتب معادلة التوازن :

$$\Sigma F_y = 2T - 200 = 0$$



بعد ذلك نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة A باعتبارها جُسَيْماً مادياً (نقطة) لأنها مهملة الأبعاد أيضاً ثم نكتب معادلات التوازن :

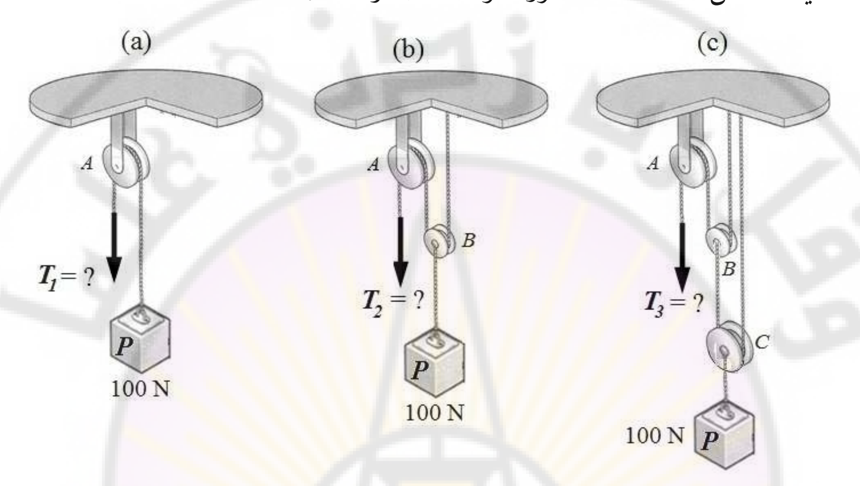
$$\Sigma F_x = F_{AC}\cos 60° - F_{AB} + T\sin 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = F_{AC}\sin 60° - 2T - T\cos 30° = 0$$

ينتج لدينا بحل المعادلات الثلاث السابقة الآتي :

$$T = 100\ N \quad , \quad F_{AB} = 215.5\ N \quad , \quad F_{AC} = 330.9N$$

مثال رقم (11)

أوجد قوة الشدّ الضرورية للحفاظ على توازن ثقل مقداره 100 N في الحالات الثلاث الموضَّحة في الشكل . ملاحظة : أوزان وأبعاد البكرات مهملة .



الحل : ....

الحالة الأولى (a) :نرسم مخطط الجسم الحر للثقل ***P*** استناداً إلى مبدأ الفعل ورد الفعل ، مع ملاحظة أن قيمة الشدّ ثابتة في كافة نقاط الحبل ، ثم نكتب معادلة التوازن الآتية :

$$\Sigma F_y = T_1 - 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 100 \text{ N}$$

الحالة الثانية (b) :نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة B ، ثم نكتب معادلة التوازن الآتية :

$$\Sigma F_y = 2T_2 - 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 50 \text{ N}$$

الحالة الثالثة (c) :نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة B ، ثم نكتب المعادلة الآتية :

$$\Sigma F_y = 2T_3 - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_3 = 25 \text{ N}$$

2–3 القوى المتوازية (Parallel Forces) :

إن الشروط التحليلية لتوازن مجموعة من القوى المتوازية ، والموازية للمحور الشاقولي y مثلاً ، تتلخص في المعادلتين الآتيتين :

$$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_o = 0 \qquad (5)$$

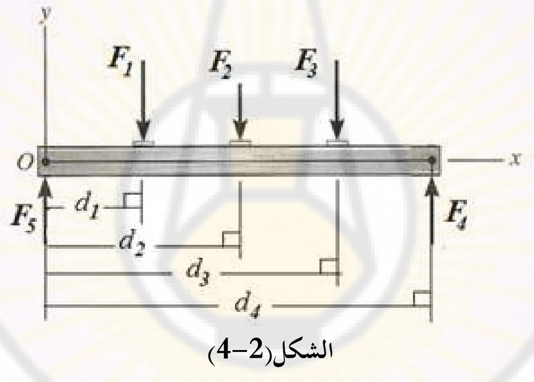
حيث : ΣF_y - مجموع مساقط القوى على محور الإحداثيات y .

ΣM_o - مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة اختيارية ملائمة O .

نطبق شرطي التوازن على جملة القوى المتوازية المبينة في الشكل(2–4) فنجد :

$$\Sigma F_y = -F_1 - F_2 - F_3 + F_4 + F_5 = 0$$

$$\Sigma M_o = -F_1 \times d_1 - F_2 \times d_2 - F_3 \times d_3 + F_4 \times d_4 = 0$$



الشكل(2–4)

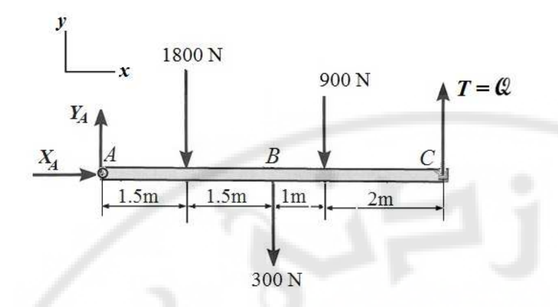
توضح الأمثلة الآتية كيفية دراسة توازن الجسم الصلب تحت تأثير جملة قوى متوازية .

مثال رقم (12)

تأمّل الجائز المبين في الشكل، ثم أوجد ردّ فعل المسند المفصلي الثابت A وكذلك مقدار الحمل Q اللازم لتحقيق التوازن .

الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر لهذا الجائز ، مع ملاحظة أن قوة الشد Tفي الحبل تساوي الحمل Q ، ثم نكتب معادلات التوازن :



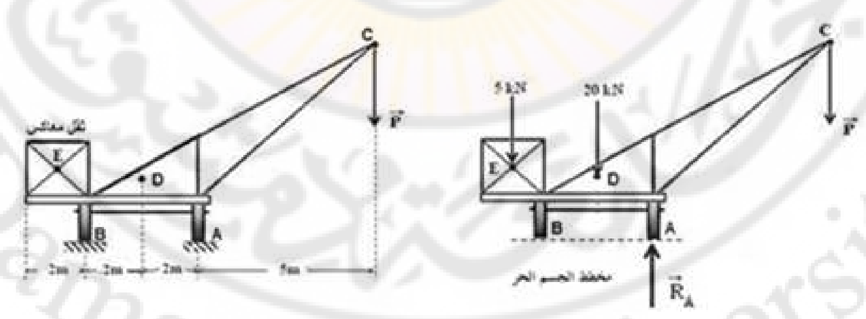
$$\Sigma F_x = X_A = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + Q - 1800 - 300 - 900 = 0$$
$$\Sigma M_A = Q\times 6 - 1800\times 1.5 - 300\times 3 - 900\times 4 = 0$$

بحل هذه المعادلات ينتج لدينا :

$X_A = 0 \qquad Y_A = 1950\ N \qquad Q = 1050\ N$

مثال رقم (13)

رافعة Crane وزنها 20 kN ، ترتكز على سكتين حديديتين A وB كما هو مبين في الشكل .ولمنع هذه الرافعة من الانقلاب بفعل الحمل P المطبق في النقطة C تُحمّل بثقل موازنة معاكس يساوي 5 kN . المطلوب تعيين الحمل الأعظم P بحيث لا تميل الرافعة نحو الجهة اليمنى .



الحل : ....

لا بدّ لنا من البحث في الوضع الحدّي الآتي : عندما يكون الحمل الأعظم P مطبقاً في النقطة C فإن الرافعة تصبح على وشك الانقلاب نحو الجهة اليمنى وتنفصل حينئذ عن

المسند B الذي ينعدم رد فعله في هذه اللحظة الحرجة كما هو واضح في مخطط الجسم الحر للرافعة. فإذا أخذنا مجموع عزوم القوى حول النقطة A حصلنا على الآتي :

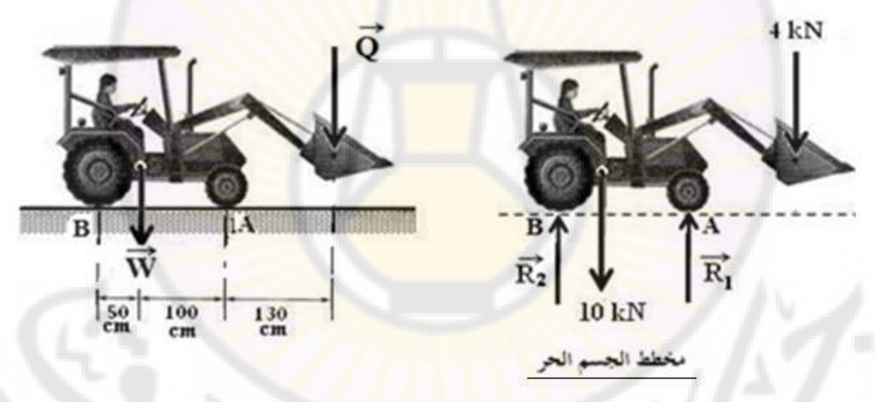
$$\Sigma M_A = - P(5) + 20(2) + 5(5) = 0$$

ومن هنا نجد أكبر حمل تستطيع الرافعة رفعه دون أن تنقلب وهو : P = 13 kN

مثال رقم (14)

جرّار وزنه W = 10 kN يقوم برفع كمية من الحصى مقدارها Q = 4 kN ويرتكز على أرض أفقية كما هو مبين في الشكل . المطلوب حساب ما يلي :

1. رد فعل سطح الأرض على ضغط العجلتين الأماميتين .
2. رد فعل سطح الأرض على ضغط العجلتين الخلفيتين .



الحل : ....

يقع الجرار المفروض تحت تأثير القوى الآتية : وزنه W ووزن الحمولة Q ورد فعل الأرض على زوج العجلات الأمامية R_1 ورد فعل الأرض على زوج العجلات الخلفية R_2 . وبناءً على هذا التحليل نرسم مخطط الجسم الحر للجرار ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - 10 - 4 = 0$$

$$\Sigma M_B = R_1 (150) - 4 (280) - 10 (50) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج : $R_2 = 3.2$ kN $\quad R_1 = 10.8$ kN

4–2 القوى العامة المتفرقة (General Forces) :

إنّ الشروط التحليلية لتوازن مجموعة من القوى العامة المتفرقة هي:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \Sigma M_o = 0 \qquad (6)$$

حيث : ΣF_x - مجموع مساقط القوى على محور الإحداثيات x .

ΣF_y - مجموع مساقط القوى على محور الإحداثيات y .

ΣM_o - مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة اختيارية ملائمة O .

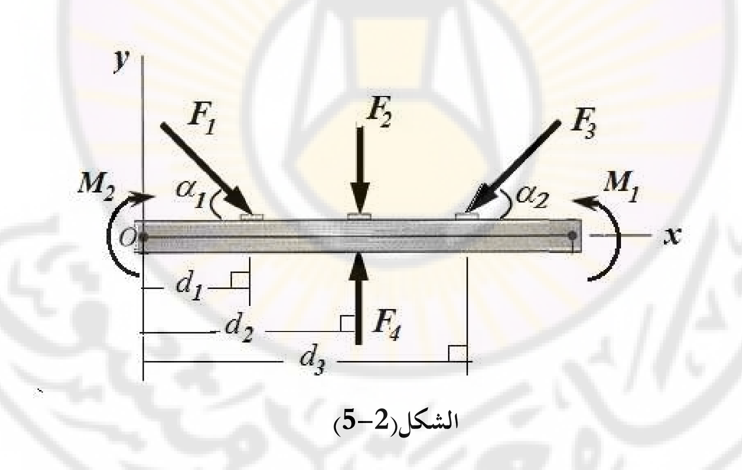
نطبق أيضاً شروط التوازن على جملة القوى المتفرقة الموضحة في الشكل(2–5) فنجد :

$$\Sigma F_x = F_1 \cos \alpha_1 - F_3 \cos \alpha_2 = 0$$

$$\Sigma F_y = -F_1 \sin \alpha_1 - F_2 - F_3 \sin \alpha_2 + F_4 = 0$$

$$\Sigma M_o = 0$$

$$-F_1 \sin \alpha_1 (d_1) - F_2 (d_2) - F_3 \sin \alpha_2 (d_3) + F_4 (d_2) + M_1 - M_2 = 0$$



الشكل(2–5)

توازن جملة أجسام مركبة : في حالة اتصال جملة من الأجسام الصلبة فيما بينها يمكننا تقسيم القوى التي تؤثر في هذه الجملة إلى مجموعتين :

- قوى داخلية : وهي القوى التي تجعل أجزاء الجملة المفروضة متماسكة ، أو بتعبير آخر هي قوى التأثير المتبادل بين الأجزاء المتماسكة . وحسب قانون الفعل ورد

الفعل : إذا أثّر جسم في جسم آخر فإن قوتي الفعل ورد الفعل تكونان متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاتجاه .

- قوى خارجية : وهي القوى التي تؤثر بها الأجسام الخارجية في أجزاء الجملة المفروضة.

وحسب شكل الاتصال بين الأجزاء الداخلة في تركيب جمل الأجسام المركبة يمكن التمييز بين الأنواع الآتية في التطبيقات الهندسية :

1. الأجزاء الداخلة في تركيب المجموعة يستند بعضها إلى بعض بشكل حر.
2. الأجزاء الداخلة في تركيب المجموعة يتصل بعضها مع بعض بمساعدة مفاصل.

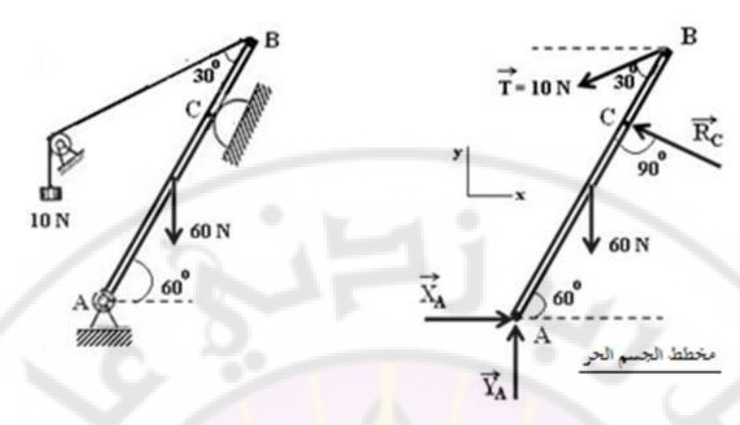
عند حل المسائل المتعلقة بتوازن جملة من الأجسام المركبة من الضروري مراعاة أن جميع القوى الداخلية والخارجية المؤثرة في كل جسم متوازنة . وبناءً على ذلك يمكن كتابة ثلاث معادلات توازن لكل جسم من أجزاء الجملة المفروضة .

إذا كانت الجملة مؤلفة من جسمين مثلاً فإننا نقوم بفصلهما ونرسم مخطط الجسم الحر لكل منهما ونستطيع عندئذ كتابة ثلاث معادلات توازن لكل جسم . ويمكننا استخدام طريقة أخرى أكثر بساطة وذلك بدراسة توازن كامل الجملة المفروضة دون تفكيك ثم ندرس بعد ذلك توازن أحد جسمي الجملة فنحصل أيضاً على ست معادلات توازن.

تقدّم الأمثلة الآتية شرحاً وافياً عن كيفية دراسة توازن جسم واحد أو جملة من الأجسام عندما تكون تحت تأثير جملة قوى عامة متفرقة .

مثال رقم (15)

ذراع متجانس AB طوله 100 cm ووزنه 60 N مثبت بمساعدة مفصل في النقطة A ويرتكز في الوقت نفسه ارتكازاً حراً على سطح اسطواني أملس في النقطة C كما هو مبين في الشكل . يُثبّت في الطرف B حبل يمر على بكرة ثابتة ومعلق بنهايته الحرة ثقل مقداره 10 N . أوجد ردي فعل المسندين A و C إذا علمت أن BC=25cm .



الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر للذراع AB ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A - R_C \cos 30° - 10 \cos 30° = 0$$

$$\Sigma F_y = Y_A + R_C \sin 30° - 10 \sin 30° - 60 = 0$$

$$\Sigma M_A = R_C (75) - 60 (50 \cos 60°) + 10(50) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

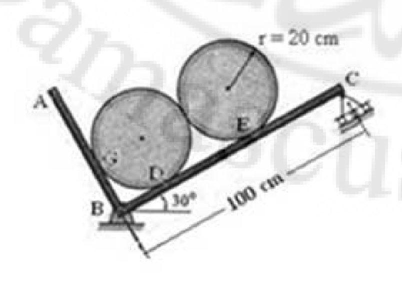
$$X_A = 20.2 \text{ N}$$

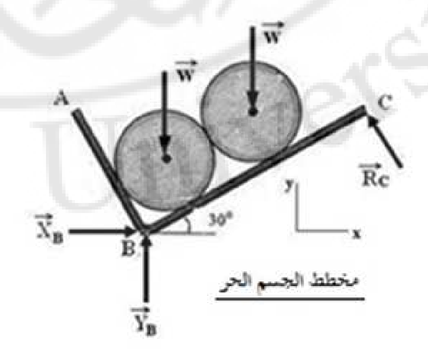
$$Y_A = 58.3 \text{ N}$$

$$R_C = 13.3 \text{ N}$$

مثال رقم (16)

ترتكز اسطوانتان متماثلتان تزن كل واحدة منهما 500 N على إطار ABC قائم الزاوية في B كما هو مبين في الشكل . المطلوب حساب ردي الفعل في نقطتي استناد الإطار B و C .





الحل : ....

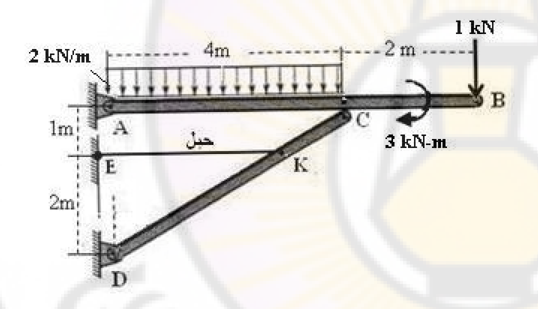
نحرر الجملة المفروضة مجتمعة من المسندين B و C كما هو مبين في الشكل ثم نكتب معادلات التوازن فنجد :

$$\Sigma F_x = X_B - R_C \sin 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_B - 500 - 500 + R_C \cos 30° = 0$$
$$\Sigma M_B = (500 \sin 30°)(20) - (500 \cos 30°)(20) + (500 \sin 30°)(20) - (500 \cos 30°)(60) + R_C(100) = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل على الآتي:

$$R_C = 246.4\ N \quad X_B = 123.2\ N \quad Y_B = 786.6\ N$$

مثال رقم (17)



ذراع أفقي متجانس AB وزنه 1kN ويخضع لتأثير القوى الموزعة والمركزة المبينة في الشكل . يستند هذا الذراع بشكل حر في النقطة C إلى ذراع آخر CD طوله 5m ووزنه 1.2 kN، ويحافظ على توازنه بمساعدة حبل أفقي . المطلوب تعيين ردود الفعل في النقاط A وCوD ، وكذلك قوة الشد T بالحبل.

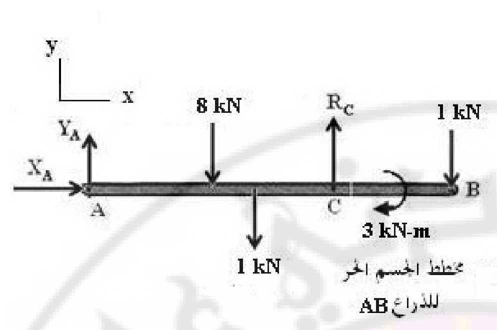
الحل : ....

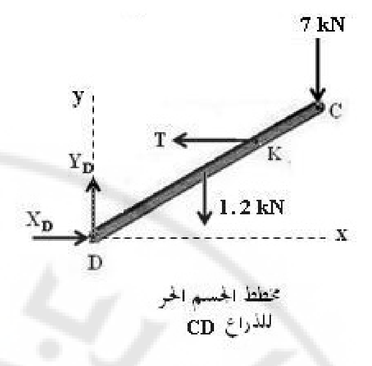
الذراع AB : نرسم مخطط الجسم الحر ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + R_C - 8 - 1 - 1 = 0$$
$$\Sigma M_C = R_C(4) - 3 - 8(2) - 1(3) - 1(6) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_A = 0 \quad Y_A = 8.2\ kN \quad R_C = 7\ kN$$





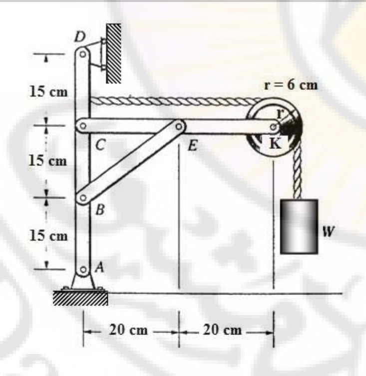
الذراع CD : نرسم مخطط الجسم الحر لهذا الذراع ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A - T = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_D - 1.2 - 7 = 0$$
$$\Sigma M_D = T\,(2) - 7\,(4) - 1.2\,(2) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_D = 15.2 \text{ kN} \qquad Y_D = 8.2 \text{ kN} \qquad T = 15.2 \text{ kN}$$

مثال رقم (18)



تتكون الرافعة المبينة في الشكل من ثلاثة أذرع وبكرة حيث ترتبط فيما بينها بوساطة مفاصل وحبل . المطلوب تعيين القوى المؤثرة في كل عضو من أعضاء الرافعة إذا علمت أن مقدار الحمل المرفوع **W** يساوي 180 N .

الحل : ....

نحسب أولاً ردي فعل المسندين A وD بعد رسم مخطط الجسم الحر لمجمل الرافعة .في هذه الحالة تكون معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A - X_D = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A - 180 = 0$$

$$\Sigma M_A = X_D (45) - 180 (46) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_A = 184 \text{ N} \quad Y_A = 180 \text{ N} \quad R_D = 184 \text{ N}$$

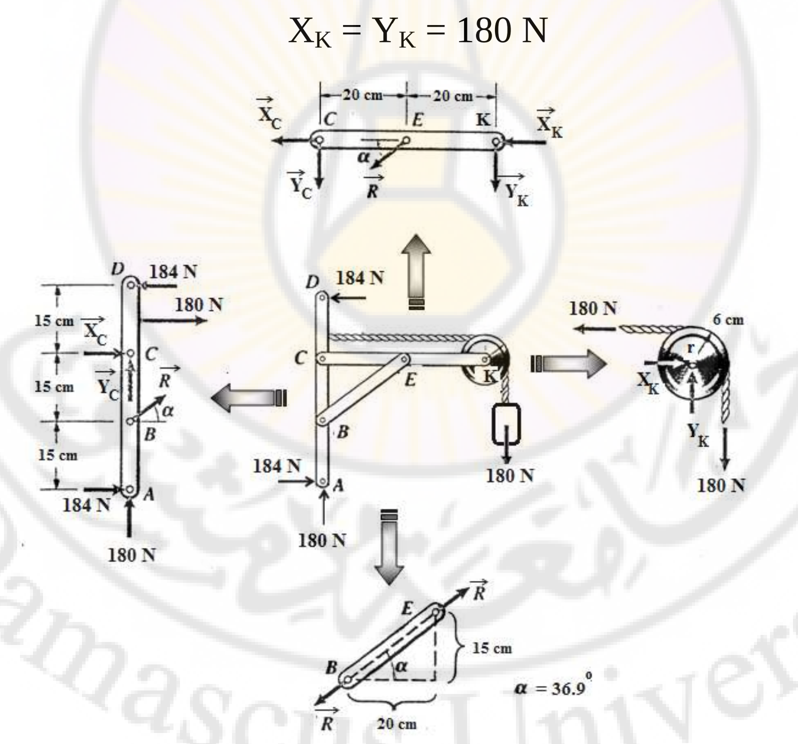
في الخطوة الثانية نقوم بتفكيك الرافعة ثم نرسم مخطط الجسم الحر لكل عضو من أعضاء الرافعة كما هو واضح في الشكل .

البكرة : ندرس توازن البكرة التي تخضع لتأثير القوى الموضحة في مخطط الجسم الحر الخاص بها . لهذا نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_K - 180 = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_K - 180 = 0$$

من هاتين المعادلتين نحصل على الآتي :

$$X_K = Y_K = 180 \text{ N}$$



الذراع الأفقي CEk : ندرس توازن هذا الذراع الذي يخضع لتأثير القوى الموضحة في مخطط الجسم الحر الخاص به . لهذا نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = - X_C - R \cos 36.9° - 180 = 0$$

$$\Sigma F_y = -Y_C - R \sin 36.9° - 180 = 0$$
$$\Sigma M_C = - R \sin 36.9° (20) - 180 (40) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_C = 300 \text{ N} \quad Y_C = 180 \text{ N} \quad R = - 600 \text{ N}$$

تشير الإشارة السالبة للقوة R إلى أن الاتجاه الفعلي لها هو عكس الاتجاه المفروض في الرسم . نلاحظ أخيراً أن القوى المؤثرة في جميع أعضاء الرافعة قد أصبحت معلومة ويمكن ترتيبها في الجدول الآتي :

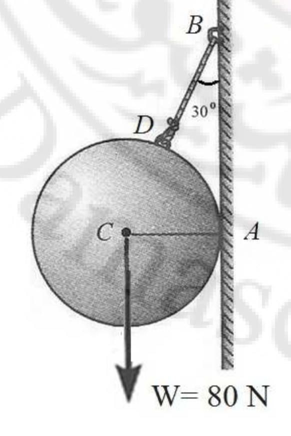
القوى المؤثرة في أجزاء الرافعة بوحدة N							
X_A	Y_A	R_D	R	X_C	Y_C	X_K	Y_K
184	180	184	- 600	300	180	180	180



مسائل غير محلولة
UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

كرة متجانسة وزنها W=80 N ونصف قطرها 30cm تُربط مع الحائط بواسطة حبل كما هو مبين في الشكل. أوجد قوة الشد T المتولدة في الحبل وكذلك ردّ فعل الجدار في النقطة A .

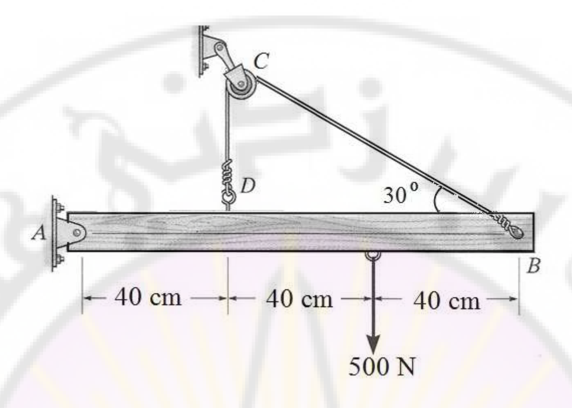


الجواب :

$T = 92.4$ N , $R_A = 46.2$ N (←)

مسألة رقم (2) :

تأمل الشكل المجاور ، ثم أوجد قوة الشد المتولدة في الكبل وكذلك رد فعل المسند A .

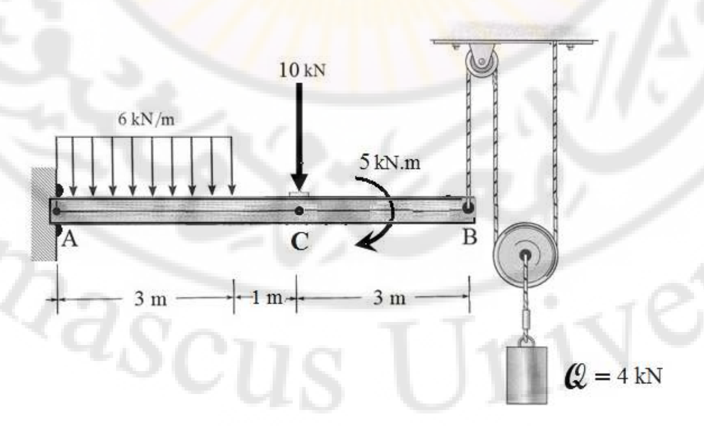


الجواب :

$T = 400\ N$, $X_A = 346.4\ N\ (\rightarrow)$, $Y_A = 100\ N\ (\downarrow)$

مسألة رقم (3) :

يُثبّت الجائز AB بشكل صلب في النقطة A ثم يُربط في النقطة B بحبل يلتف على بكرتين كما يبيّن الشكل المرافق . أوجد قوة شدّ الحبل T وكذلك مركّبات ردّ الفعل في نقطة التثبيت A ، إذا علمت أن وزن الحمل المعلّق بالبكرة E يساوي 4kN .

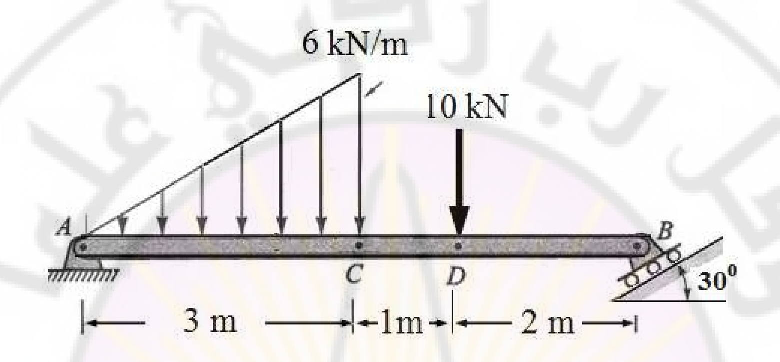


الجواب :

$T = 2\ kN\ (\uparrow)$, $X_A = 0$, $Y_A = 26\ kN\ (\uparrow)$, $M_A = 58\ kN.m\ (\curvearrowleft)$

مسألة رقم (4) :

يخضع الجائز الموضح في الشكل المجاور لتأثير قوى خارجية ، والمطلوب : رسم مخطط الجسم الحر لهذا الجائز ثم حساب ردي فعل المسندين A و B .

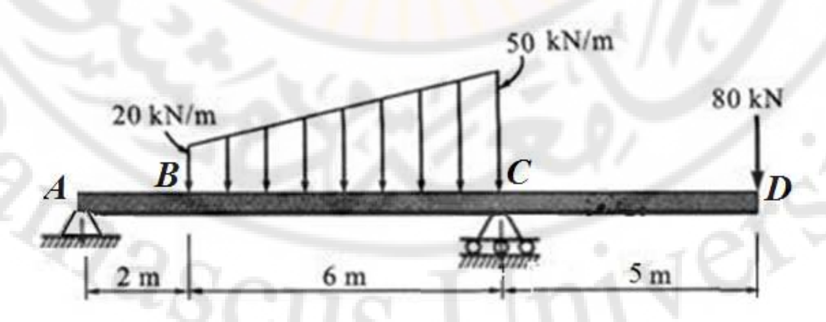


الجواب :

$X_A = 6.45$ kN (→) , $Y_A = 7.83$ kN (↑) ; $R_B = 12.9$ kN (↖)

مسألة رقم (5) :

يخضع الجائز الموضح في الشكل المجاور لتأثير قوى متوازية ، والمطلوب : رسم مخطط الجسم الحر لهذا الجائز ثم حساب ردي فعل المسندين A و C .

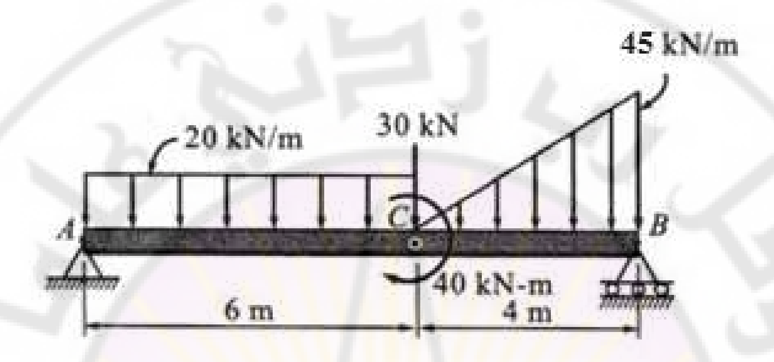


الجواب :

$X_A = 0$, $Y_A = 72$ kN (↑) , $R_C = 218$ kN (↑)

مسألة رقم (6) :

يرتكز الجائز AB الموضح في الشكل المجاور على مسندين أحدهما مفصلي ثابت والآخر متحرك ويخضع لتأثير القوى المبينة في الشكل . احسب ردي فعل المسندين A و B .



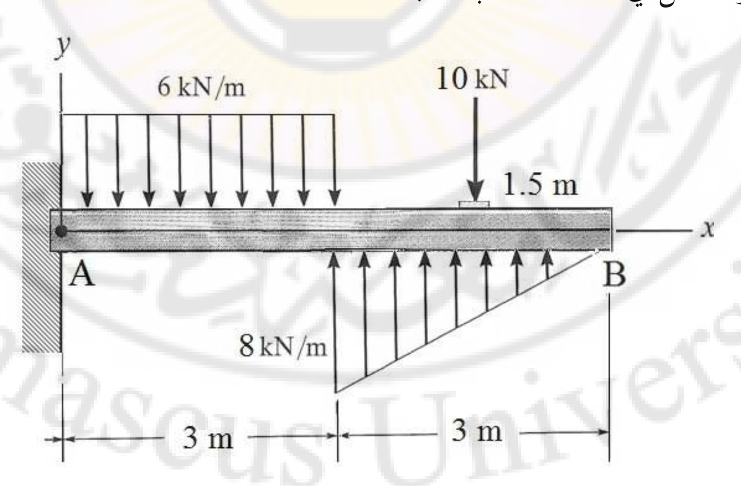
الجواب :

$X_A = 0$, $Y_A = 104$ kN (↑) , , $R_B = 136$ kN (↑)

مسألة رقم (7) :

يُثبّت الجائز AB من طرف واحد في الجدار ويخضع لتأثير القوى المبينة في الشكل .

أوجد رد الفعل في المسند الصلب الثابت A .

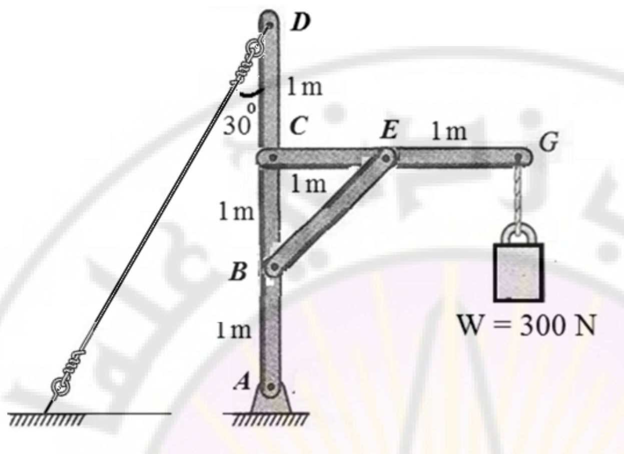


الجواب :

$X_A = 0$, $Y_A = 16$ kN (↑) , M = 24 kN.m (↶)

Damascus University

مسألة رقم (8) :

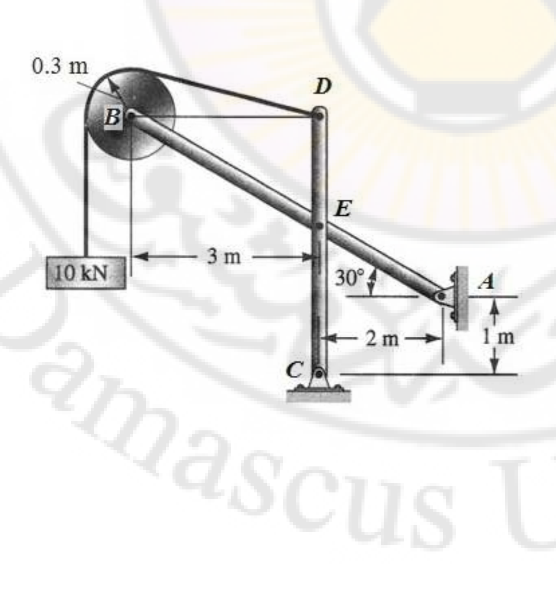


يُثبّت إطار رافعة في النقطة A بمساعدة مسند مفصلي ثابت ، ثم يربط بكبل يميل بزاوية قدرها $30°$ بعد ذلك يُعلّق الثقل W كما هو مبين في الشكل المجاور. أوجد قوة شد الكبل وكذلك رد فعل المسند A .

الجواب :

$T = 400\ N$, $X_A = 200\ N(\rightarrow)$, $Y_A = 646\ N\ (\uparrow)$

مسألة رقم (9) :



عارضتان AB و CD متصلتان اتصالاً مفصلياً في النقطة E ، ويؤثر فيهما ثقل مقداره 10kN من خلال بكرة وحبل كما هو مبين في الشكل. المطلوب: رسم مخطط الجسم الحر لكل عنصر من عناصر هذه الجملة الميكانيكية ، ثم تعيين ردي فعل المسندين A وC .

الجواب :

$X_A = 8\ kN\ (\rightarrow)$, $Y_A = 12.5\ kN\ (\downarrow)$; $X_C = 8\ kN\ (\leftarrow)$, $Y_C = 22.5\ kN\ (\uparrow)$

مسألة رقم (**10**) :

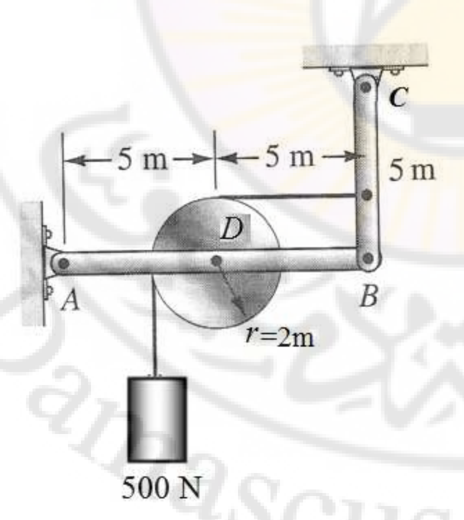
يستند ذراع مائل AB ، وزنه 300N وطوله 0.8m ، إلى اسطوانة متجانسة وزنها 200N ونصف قطرها 0.2m كما هو مبين في الشكل. وتُمنع هذه الاسطوانة من التدحرج بفعل سلك مربوط بالذراع AB المثبَّت بمساعدة مسند مفصلي في النقطة A. أوجد ردّ الفعل في كل من النقطتين A وD .

الجواب :

$R_A = 126$ N (↑) ; $R_D = 374$ N(↑)

مسألة رقم (**11**) :

تتكون الرافعة المبينة في الشكل من ذراعين وبكرة حيث ترتبط فيما بينها بوساطة مفاصل وحبل. أوجد مركّبات ردود أفعال المفاصل الثابتة A وB وC ، إذا علمت أن وزن البكرة يساوي 1000 N .



الجواب :

X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C
100N(←)	750N(↑)	400N	750N	100N(→)	750N(↑)

الفصل الثالث

تحليل الهياكل الشبكية

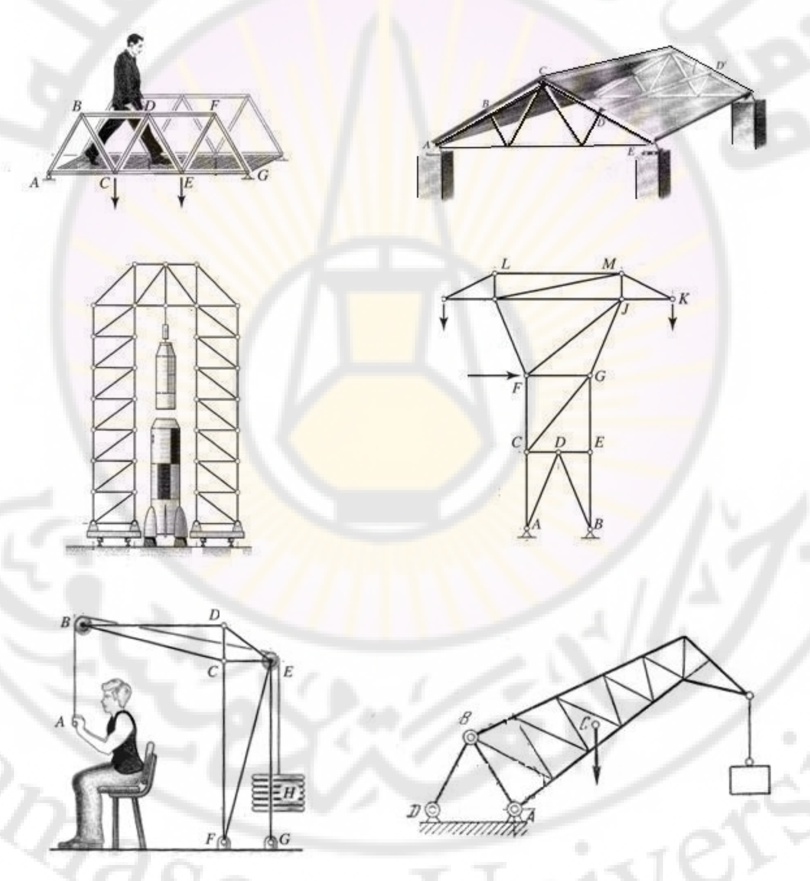
ANALYSIS 0F TRUSSES

3-1 مقدمة (Introduction) :

يتناول هذا الفصل الهياكل الشبكية الواقعة في مستو واحد ، والتي تسمى أيضاً بالجوائز الشبكية المستوية . يُعرَّف الهيكل أو الجائز الشبكي المستوي بأنه جملة من القضبان الواقعة في مستو واحد والمتصلة نهاياتها بمسامير (Pins) أو بصفائح (Plates) تُثبَّت إليها تلك القضبان .وتدعى هذه القضبان في المراجع الحديثة بأعضاء أو أضلاع الهيكل (Members of the truss) ، كما تدعى مسامير أو صفائح ربط القضبان عادة بالعقد (Joints). إن الهياكل الشبكية كثيرة الانتشار في حياتنا فهي تشاهد كما هو واضح في الشكل(3-1) في الأبراج الحاملة لخطوط التوتر العالي، والجسور ، وأبراج الاتصالات بشتى أنواعها ، والروافع الشبكية الكبيرة ، وفي سقوف المنازل والمعامل والمستشفيات ومراكز التسوق والصالات الرياضية وغيرها . ومن الشائع عملياً في دراسة توازن الهياكل الشبكية أن تراعى الافتراضات الآتية :

- إن نهايات الأضلاع في الهيكل متصلة بمسامير عديمة الاحتكاك .
- إن القوى الخارجية المؤثرة في الهيكل كلها مطبّقة على العقد فقط وهي واقعة في مستوي الهيكل الشبكي .

• أوزان الأضلاع تكون عادة صغيرة مقارنة بالحمولات الخارجية المطبقة على الهياكل الشبكية لهذا فهي لا تُحتسب . وبناءً على ذلك تؤثر في كل ضلع من أضلاع الهيكل قوتان عند نهايتيه ، وفي حالة التوازن يجب أن تكون هاتان القوتان متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاتجاه ولهما نفس الحامل المنطبق على محور الضلع. ومنه نستنتج أن أضلاع الهياكل الشبكية تتعرض عند العمل للشدّ (Tension) أو الانضغاط (Compression) كما هو مبين في الشكل (3-2).



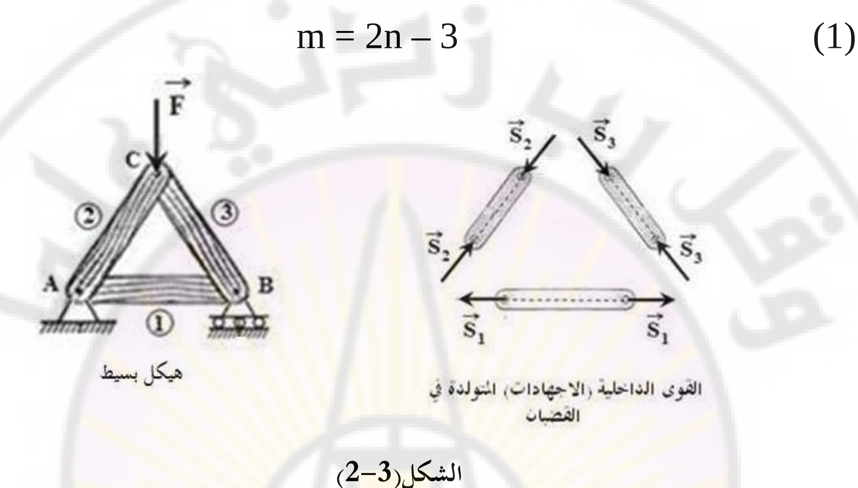
الشكل(3-1)

وسنكتفي في هذا الفصل بدراسة الهياكل المتماسكة المكونة من مثلثات والتي لا تحتوي على أضلاع إضافية والتي تسمى بالهياكل المحدّدة ستاتيكياً (Statically

Damascus University

(determinate trusses ، ودراستها تعدّ سهلة لأن معادلات التوازن تكفي تماماً لتحديد القوى المجهولة والتي تشمل القوى الداخلية للأضلاع وردود فعل المساند . وفي هذه الهياكل يرتبط عدد الأضلاع m بعدد العقد n بالعلاقة الآتية :

$$m = 2n - 3 \qquad (1)$$

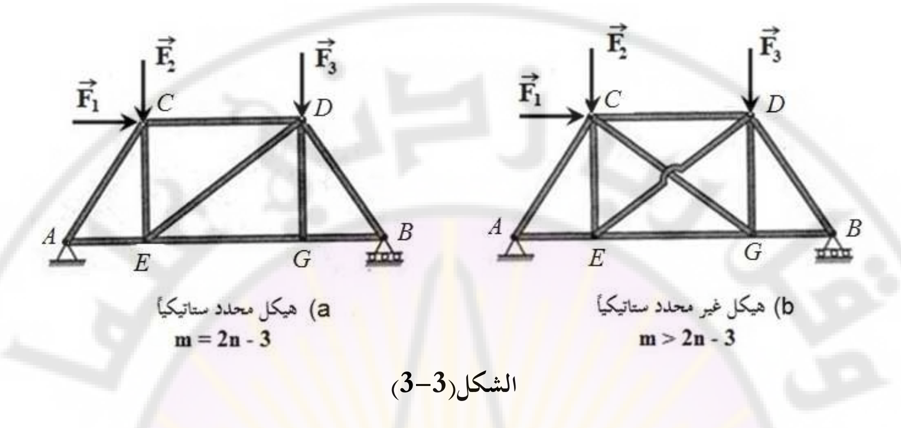


الشكل(3–2)

ففي الهيكل البسيط المؤلف من ثلاثة أضلاع توجد فعلاً ثلاث عقد ، ويتطلب الأمر ضلعين لتوصيل كل عقدة جديدة . وإذا قلّ عدد الأضلاع في الهيكل عن الحد المقدر طبقاً للعلاقة السابقة يكون الهيكل عندئذ قلقاً وغير متماسك (Unstable) وقابلاً للانهيار (Collapsible) في أية لحظة تحت تأثير الحمولات المطبّقة . أما إذا زاد عدد الأضلاع في الهيكل المدروس عن الحد المذكور فإن عدد القوى المجهولة سيكون أكبر من عدد معادلات التوازن ، ويعدّ الهيكل حينئذ كما هو مبين في الشكل(3–3) غير محدّد ستاتيكياً (Statically indeterminate truss) . ويدرس هذا النوع من الهياكل المعقدة في مقررات دراسية أخرى متقدمة .

وتتلخص دراسة توازن الهياكل في تعيين ردود فعل المساند وتحديد القوى المحورية الداخلية المتولدة في الأضلاع بفعل الحمولات الخارجية . ويمكن تعيين ردود فعل المساند بعد اعتبار الهيكل المفروض ككل جسماً صلباً . ومن ناحية أخرى تتعين القوى المحورية الداخلية المتولدة في الأضلاع بإحدى الطريقتين الآتيتين :

1. طريقة فصل العقد (Method of joints)
2. طريقة قطع الهيكل (Method of sections)



الشكل(3–3)

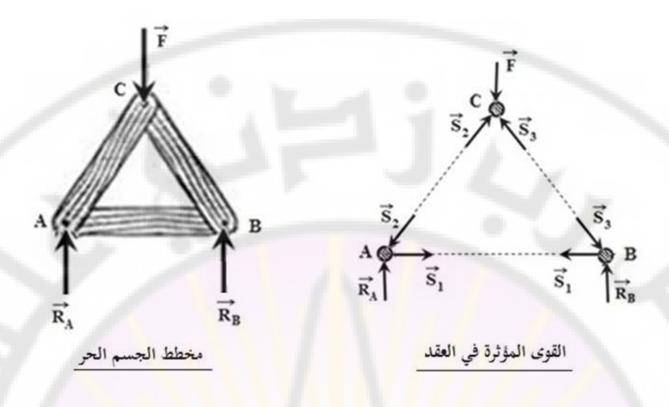
3–2 طريقة فصل العقد (Method of joints):

تستخدم هذه الطريقة عادة عند الحاجة لتحديد القوى الداخلية المتولدة في كافة أضلاع الهيكل المفروض. ومن البديهي ، عندما يكون جسم الهيكل بكامله في حالة اتزان فإن مكوناته من عقد وأضلاع ستكون في حالة توازن أيضاً . ومن هنا تنبع فكرة الطريقة الحالية والتي تتلخص في دراسة توازن القوى المتلاقية المؤثرة في كل عقدة من عقد الهيكل . وهذه القوى تتضمن القوى الخارجية وكذلك ردود فعل الأضلاع المتصلة بالعقدة المدروسة كما هو مبين في المثال الموضح في الشكل(3–4) .

ويبدو لنا بوضوح أن تعيين القوى الداخلية بين الأضلاع والعقد يعتمد أساساً على قانون الفعل ورد الفعل . ولذلك فإن العقدة A مثلاً تؤثر في الضلع AB بالقوة S_1، والضلع AB يؤثر من ناحيته بقوة رد فعل مساوية ومعاكسة لها. وبما أن الضلع AB متوازن بفعل قوتين مطبقتين في نهايتيه ، لذا فإن هاتين القوتين متساويتان وكل منهما تساوي للقوة S_1. إن تعيين القوى الداخلية في أضلاع الهياكل الشبكية بمساعدة طريقة فصل العقد يجري عادة باتباع الخطوات الآتية :

- رسم مخطط الجسم الحر للهيكل كلّه .

- تعيين ردود الفعل للمساند التي يرتكز عليها جسم الهيكل وذلك باستخدام معادلات التوازن المناسبة .

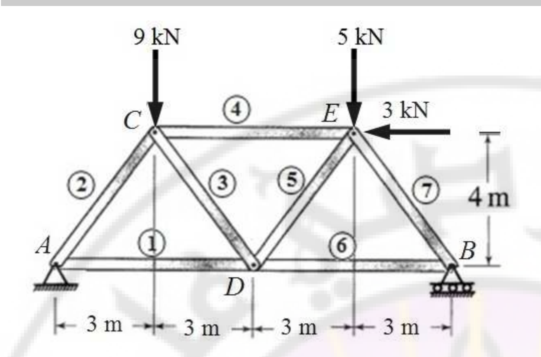


الشكل(3–4)

- رسم مخطط الجسم الحر لكل عقدة من عقد الهيكل . ويشمل مخطط العقدة القوى الخارجية وقوى رد فعل الأضلاع . وبما أن اتجاهات قوى رد فعل الأضلاع مجهولة لذا سنفرض مبدئياً أن جميع الأضلاع في حالة شدّ ، وبناءً على هذا الفرض تظهر هذه القوى في المخطط خارجة من العقد . إذا حصلنا نتيجة الحل على إشارة موجبة لقوة رد فعل ضلع ما فتوجيه القوة صحيح ويكون الضلع عندئذ في حالة شدّ ، وإذا حصلنا على إشارة سالبة فإن الضلع المدروس في حالة ضغط .
- تطبيق معادلتي التوازن الآتيتين : $\Sigma F_X=0$; $\Sigma F_Y=0$ على كل عقدة من عقد الهيكل وحساب القوى المجهولة .
- ترتيب النتائج في جدول يبين جميع القوى الداخلية المتولدة في أضلاع الهيكل قيمة ونوعاً. ومن الملاحظات المهمة :
  - o إذا تلاقت في عقدة غير مُحمّلة ثلاثة أضلاع ، اثنان منها على استقامة واحدة، فالقوة الداخلية في الضلع الثالث تكون معدومة.
  - o إذا تلاقى في عقدة غير محملة ضلعان فقط غير واقعين على استقامة واحدة، فالقوتان الداخليتان فيهما تكون معدومة.

مثال رقم (19)

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل المجاور.



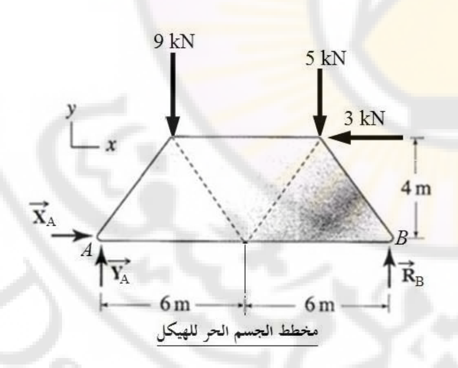
الحل : ....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل ثم نكتب معادلات التوازن:

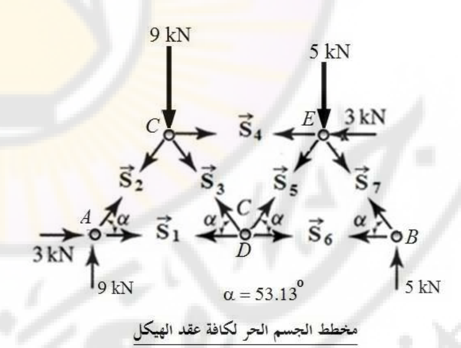
$$\Sigma F_x = X_A - 3 = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + R_B - 9 - 5 = 0$$
$$\Sigma M_A = R_E (12) + 3 (4) - 5 (9) - 9 (3) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_A = 3 \text{ kN} \quad , \quad Y_A = 9 \text{ kN} \quad , \quad R_B = 5 \text{ kN}$$



مخطط الجسم الحر للهيكل



مخطط الجسم الحر لكافة عقد الهيكل

القوى الداخلية في الأضلاع : نفرض أن جميع الأضلاع تقع في حالة شدّ ثم نرسم مخطط الجسم الحر لكل عقدة من عقد الهيكل كما هو مبين في الشكل. وبناءً على هذا الافتراض نمثل القوى الداخلية بأشعة خارجة من العقد.

العقدة A : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = S_1 + S_2 \cos \alpha + 3 = 0$$
$$\Sigma F_y = S_2 \sin \alpha + 9 = 0$$

العقدة C : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = - S_2 \cos\alpha + S_3 \cos\alpha + S_4 = 0$$
$$\Sigma F_y = - S_2 \sin\alpha - S_3 \sin\alpha - 9 = 0$$

العقدة D : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = - S_1 - S_3 \cos\alpha + S_5 \cos\alpha + S_6 = 0$$
$$\Sigma F_y = S_3 \sin\alpha + S_5 \sin\alpha = 0$$

العقدة B : معادلة التوازن لهذه العقدة :

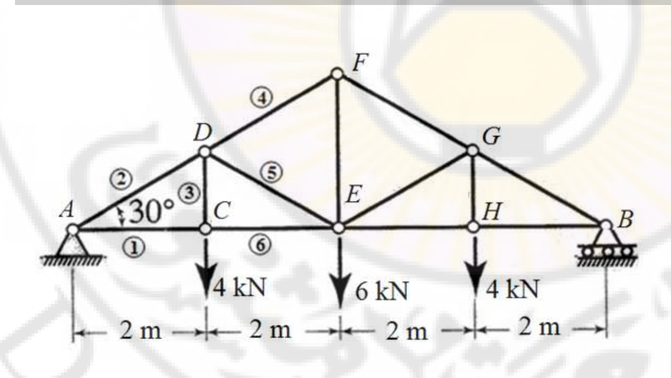
$$\Sigma F_y = S_7 \sin\alpha + 5 = 0$$

بحل المعادلات السابقة نجد القوى المطلوبة الآتية بوحدة (kN):

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
3.75	-11.25	0	-6.75	0	3.75	-6.25
شدّ	ضغط	غير عامل	ضغط	غير عامل	شدّ	ضغط

مثال رقم (20)

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع (1,2,3,4,5,6) من الهيكل الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل المجاور.



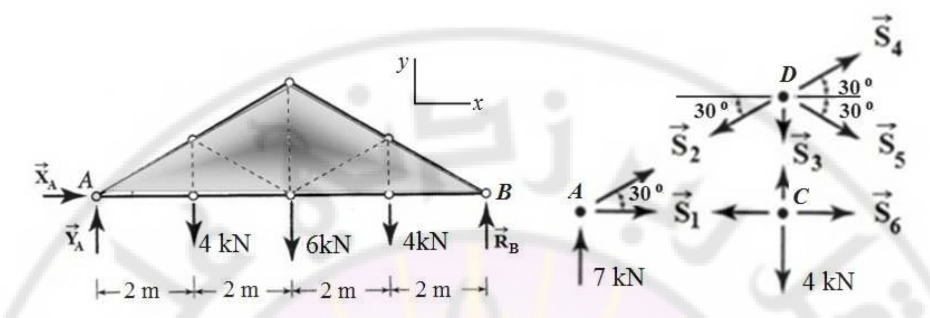
الحل : ....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل كلّه ثم نكتب معادلات التوازن:

$$\Sigma F_x = X_A = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + R_B - 4 - 6 - 4 = 0$$
$$\Sigma M_A = R_B (8) - 4 (6) - 6 (4) - 4 (2) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_A = 0 \quad , \quad Y_A = 7\ kN \quad , \quad R_B = 7\ kN$$



القوى الداخلية في الأضلاع : نفرض أن جميع الأضلاع تقع في حالة شدّ ثم نرسم مخطط الجسم الحر للعقد الثلاث A و C وD كما هو مبين في الشكل. وبناءً على هذا الافتراض نمثل القوى الداخلية بأشعة خارجة من العقد.

العقدة A : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = S_1 + S_2 \cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = S_2 \sin 30° + 7 = 0$$

العقدة C : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = - S_1 + S_6 = 0$$
$$\Sigma F_y = S_3 - 4 = 0$$

العقدة D : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = - S_2 \cos 30° + S_4 \cos 30° + S_5 \cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y - S_2 \sin 30° - S_3 + S_4 \sin 30° - S_5 \sin 30° = 0$$

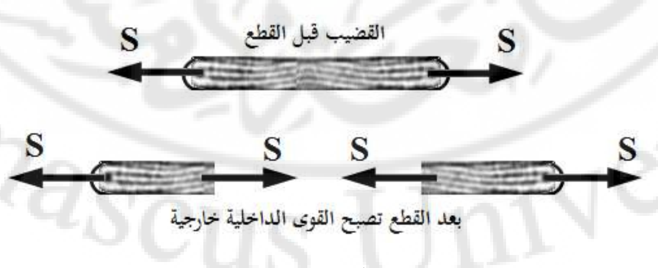
بحل المعادلات السابقة نحصل على القوى المطلوبة الآتية بوحدة (kN):

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
12.12	-14	4	-12	-2	12.12
شدّ	ضغط	شدّ	ضغط	ضغط	شدّ

3–3 طريقة قطع الهيكل (Method of sections)

الطريقة الثانية في تحليل الهياكل الشبكية هي طريقة قطع الهيكل أو المقاطع . تستخدم هذه الطريقة عادة عند الحاجة لتعيين القوى الداخلية المتولدة في بعض أضلاع الهيكل دون الاضطرار إلى تطبيق شروط التوازن تطبيقاً متتالياً على عقد الهيكل جميعها . ومن البديهي عندما يكون الهيكل بكامله في حالة اتزان فإن أي جزء مقطوع منه سيكون في حالة توازن أيضاً . ومن هنا تنبع فكرة الطريقة الحالية والتي تتلخص في قطع بعض أضلاع الهيكل ثم دراسة توازن القوى المؤثرة في الجزء المقطوع من الهيكل .إن تحليل الهياكل الشبكية بطريقة المقاطع يجري عادة وفق الخطوات الآتية :

- تحديد ردود أفعال المساند التي يرتكز عليها جسم الهيكل إذا كان ذلك ضرورياً.
- إحداث مقطع وهمي في الهيكل ، ثم نختار المقطع بحيث يمر بالأضلاع المراد تحديد القوى الداخلية المؤثرة فيها ، وينتج عن عملية القطع أن القوى الداخلية المؤثرة في الأضلاع المقطوعة تصبح قوى خارجية . كما ينبغي أن يمر المقطع بثلاثة أضلاع فقط، إذ لا نستطيع بمعادلات التوازن أن نحسب أكثر من ثلاثة مقادير مجهولة.
- دراسة توازن الهيكل المقطوع . وهنا يستحسن اختيار جزء الهيكل الأكثر سهولة، وافتراض أن الأضلاع المقطوعة في حالة شدّ ، وبناءً على هذا الفرض تظهر القوى في المخطط خارجة من الأضلاع المقطوعة كما هو مبين في الشكل (3–5).



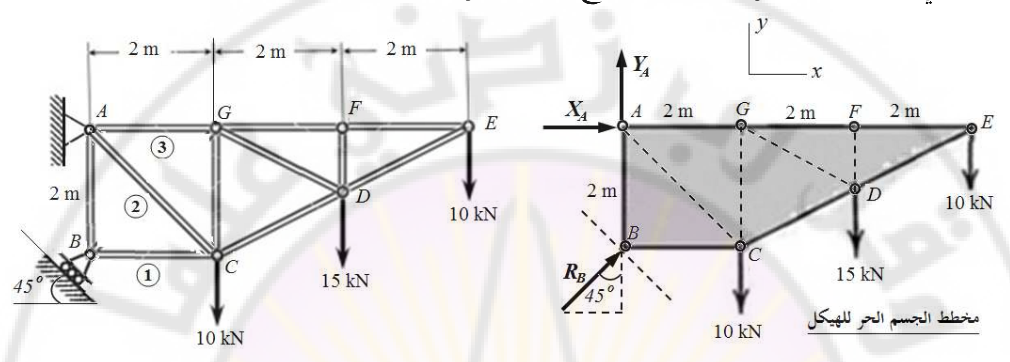
الشكل (3– 5)

في تحليل الهياكل نستخدم عادة معادلات التوازن الآتية :

$$\Sigma F_x = 0 \; ; \; \Sigma F_y = 0 \; ; \; \Sigma M_o = 0 \qquad (2)$$

مثال رقم (21)

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.



الحل : ....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A + R_B \sin 45° = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + R_B \cos 45° - 10 - 15 - 10 = 0$$
$$\Sigma M_A = R_B \sin 45° (2) - 10 (2) - 15 (4) - 10 (6) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن :

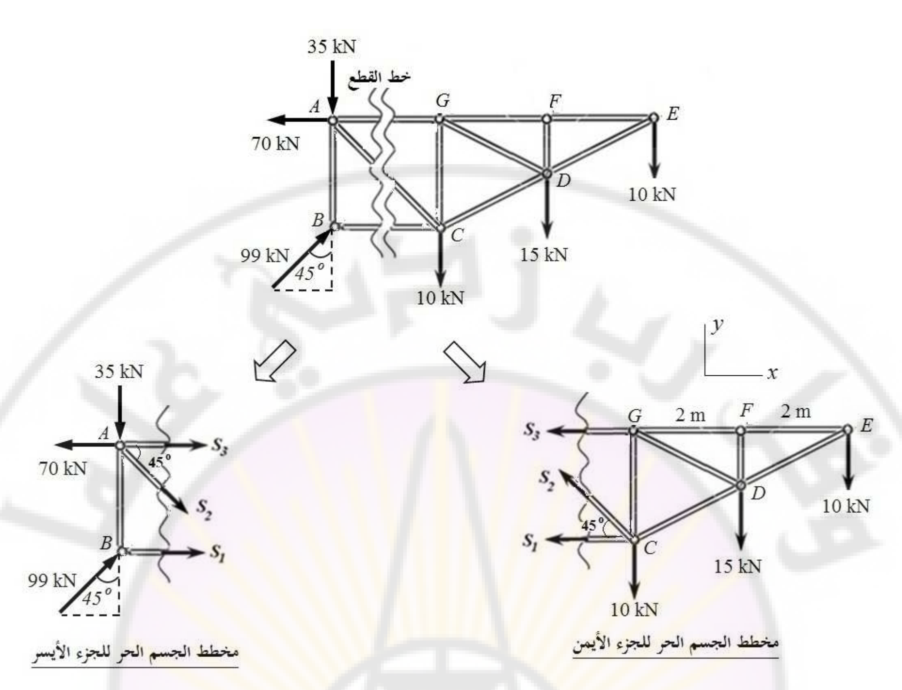
$$X_A = -70 \text{ kN} \qquad Y_A = -35 \text{ kN} \qquad R_B = 99 \text{ kN}$$

القوى الداخلية في الأضلاع :

نقطع الهيكل بحيث يمر مستوي القطع بالأضلاع المعنية بالحساب ، ثم نرسم مخطط الجسم الحر للجزء الأيمن أو للجزء اليساري من الهيكل كما هو مبين في الشكل . في هذه الحالة نفرض أن الأضلاع المقطوعة تقع في حالة شدّ ، ولهذا السبب تظهر القوى في المخطط خارجة من الأضلاع المقطوعة.

معادلات التوازن للجزء الأيمن من الهيكل:

$$\Sigma F_x = -S_1 - S_2 \cos 45° - S_3 = 0$$
$$\Sigma F_y = S_2 \sin 45° - 10 - 15 - 10 = 0$$
$$\Sigma M_C = S_3 (2) - 15 (2) - 10 (4) = 0$$



بحل هذه المعادلات نحصل على القوى الداخلية المطلوبة الآتية :

S_1	S_2	S_3
- 70 kN	49.5 kN	35 kN
ضغط	شدّ	شدّ

ملاحظة : يمكن الحصول على هذه النتائج بدراسة توازن الجزء اليساري من الهيكل.

فاستناداً إلى مخطط الجسم الحر لهذا الجزء يمكن كتابة معادلات التوازن كما يلي :

$$\Sigma F_x = S_1 + S_2 \cos 45° + S_3 + 99 \sin 45° - 70 = 0$$

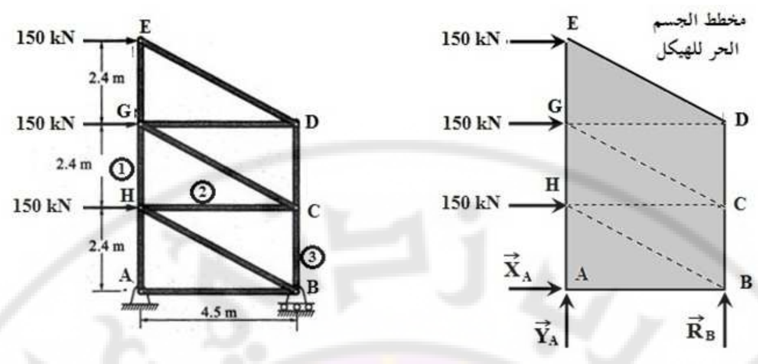
$$\Sigma F_y = - S_2 \sin 45° - 35 + 99 \cos 45° = 0$$

$$\Sigma M_A = - S_1 (2) + 99 \sin 45° (2) = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل أيضاً على النتائج السابقة .

مثال رقم (22)

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل .



الحل : ....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل ثم نكتب معادلات التوازن :

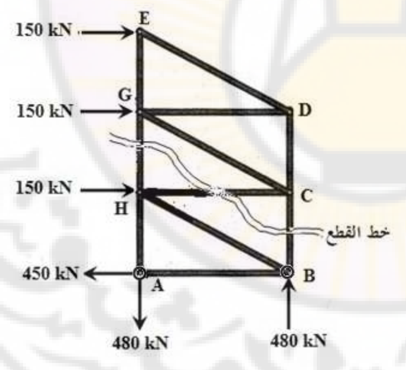
$$\Sigma F_x = X_A + 450 = 0$$

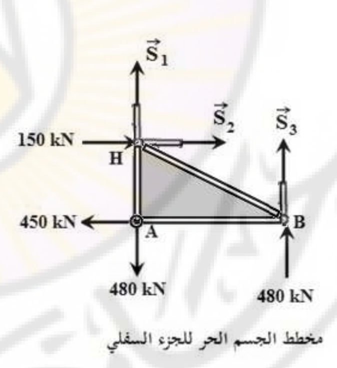
$$\Sigma F_y = Y_A + R_B = 0$$

$$\Sigma M_A = R_B (4.5) - 150 (7.2) - 150 (4.8) - 150 (2.4) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن :

$$X_A = -450 \text{ kN} \quad ; \quad Y_A = -480 \text{ kN} \ ; \ R_B = 480 \text{ kN}$$





القوى الداخلية في الأضلاع : نقطع الهيكل بحيث يمر مستوي القطع بالأضلاع المعنية بالحساب ثم نرسم مخطط الجسم الحر للجزء المختار ونكتب معادلات التوازن الآتية:

$$\Sigma F_x = S_2 + 150 - 450 = 0$$

$$\Sigma F_y = S_1 + S_3 + 480 - 480 = 0$$

$$\Sigma M_H = S_3 (4.5) + 480 (4.5) - 450 (2.4) = 0$$

من هذه المعادلات نحصل على النتائج المطلوبة الآتية :

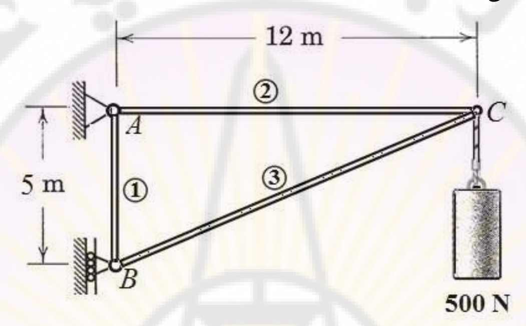
S_1= 240 kN (T)	S_2 = 300 kN (T)	S_3= - 240 kN (C)

مسائل غير محلولة

UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمَّل والمحمول كما في الشكل المرافق .

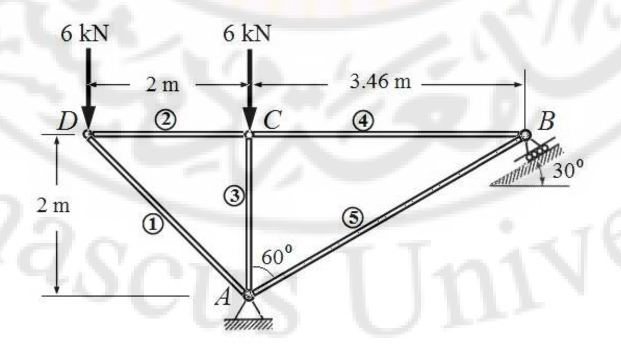


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_2
1200 N(←)	500 N(↑)	1200 N(→)	1200 N	500N	-1108 N

مسألة رقم (2) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمَّل والمحمول كما في الشكل المرافق .

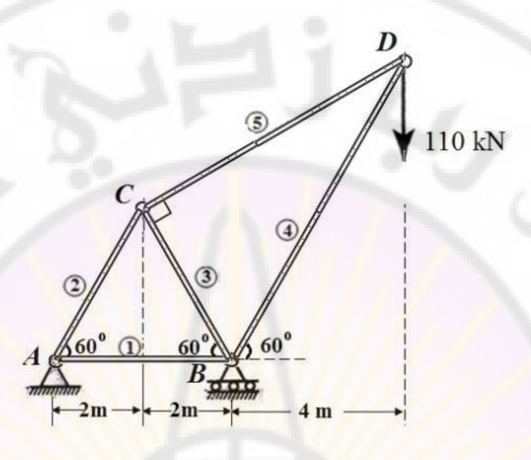


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
1.5kN(←)	14.6 kN(↑)	3kN(↘)	-8.5kN	12kN	-6kN	12kN	-5.2kN

مسألة رقم (3) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمَّل والمحمول كما في الشكل المرافق .

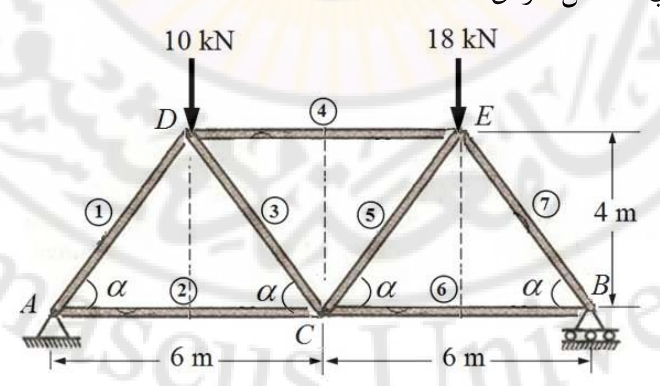


الجواب :

R_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
110 kN(↓)	220 kN (↑)	-63.5 kN	127 kN	-63.5 kN	-190.5 kN	110 kN

مسألة رقم (4) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمَّل والمحمول كما في الشكل المرافق . ملاحظة : $\alpha = 53.13°$

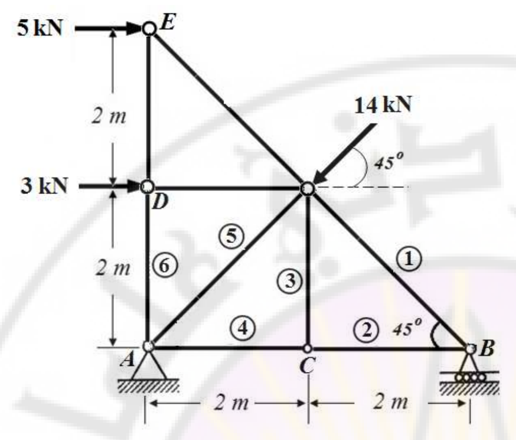


الجواب :

R_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
12kN(↑)	16kN(↑)	-15kN	9kN	2.5kN	-10.5kN	-2.5kN	12kN	-20kN

مسألة رقم (5) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع (1,2,3,4,5,6) من الهيكل الشبكي المحمَّل والمحمول كما في الشكل المجاور.

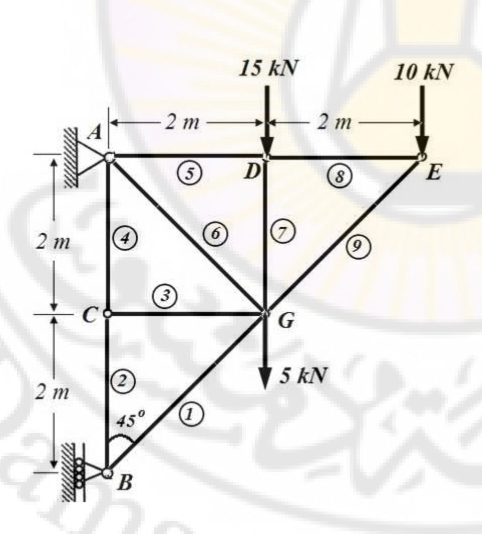


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
1.9kN(→)	3.4kN(↑)	6.5kN(↑)	-9.2kN	6.5kN	0	6.5 kN	-11.9kN	5 kN

مسألة رقم (6) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع (1,2,3,4,5,6) من الهيكل الشبكي المحمَّل والمحمول كما في الشكل المجاور.

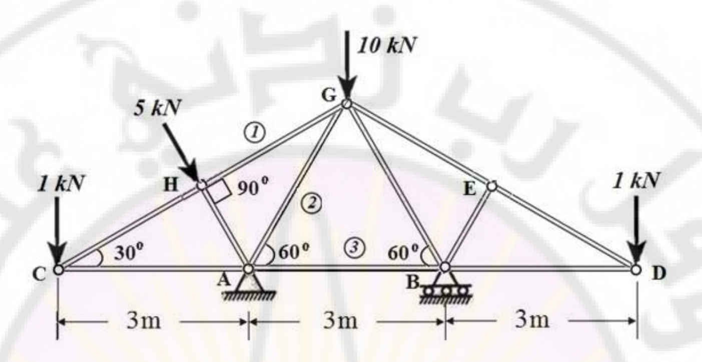


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
20kN(←)	30kN(↑)	20kN(→)	-28.3 kN	20 kN	0	20 kN	10 kN	14.14 kN

مسألة رقم (7) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المؤثرة في الأضلاع (1,2,3) من الجائز الشبكي المحمَّل والمحمول كما في الشكل المرافق .

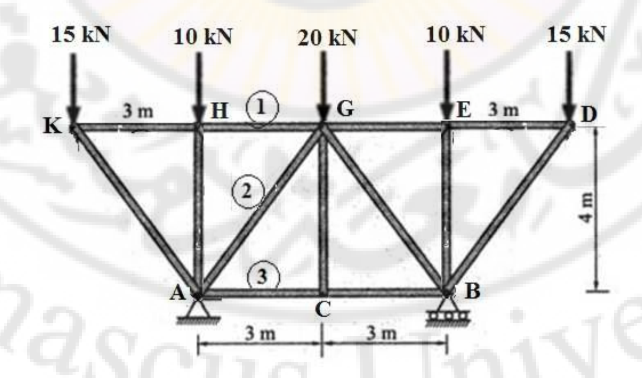


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3
2.5kN(←)	13.33 kN(↑)	3kN(↑)	2 kN	-10.39 kN	0.97 kN

مسألة رقم (8) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المؤثرة في الأضلاع (1,2,3) من الجائز الشبكي المحمَّل والمحمول كما في الشكل المرافق .



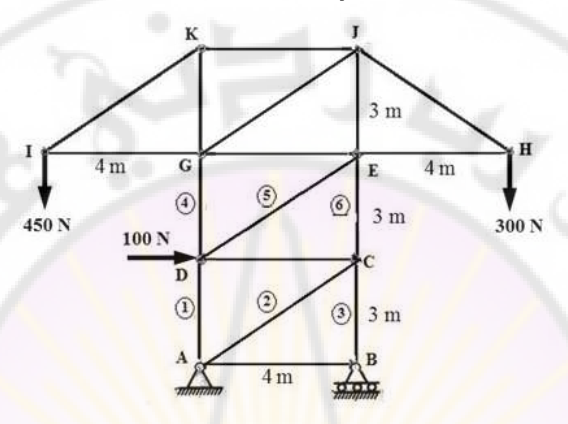
الجواب :

R_A	R_B	S_1	S_2	S_3
35kN(↑)	35kN(↑)	11.25 kN	-12.5 kN	7.75 kN

Damascus University

مسألة رقم (**9**) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المؤثرة في الأضلاع (1,2,3,4,5,6) من الجائز الشبكي المحمَّل والمحمول كما في الشكل المرافق .

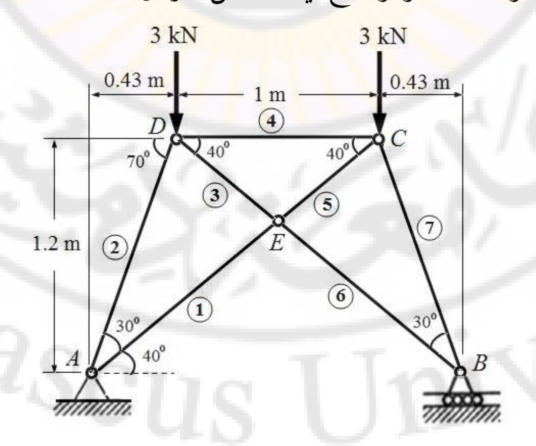


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
100 N(←)	525N(↑)	225N(↑)	-600 N	125 N	-225 N	-600 N	0	-150 N

مسألة رقم (**10**) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المؤثرة في الأضلاع (1,2,3,4) من الجائز الشبكي المحمَّل والمحمول كما هو واضح في الشكل المرافق .

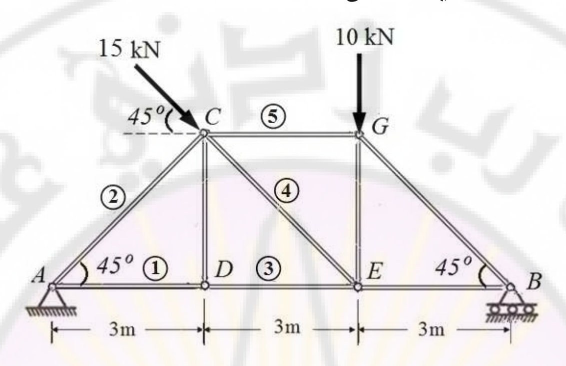


الجواب :

R_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4
3 kN(↑)	3kN(↑)	3.33kN	-7.52kN	6.34kN	-7.44kN

مسألة رقم (11) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المؤثرة في الأضلاع (1,2,3,4,5) من الجائز الشبكي المحمَّل والمحمول كما في الشكل المرافق .

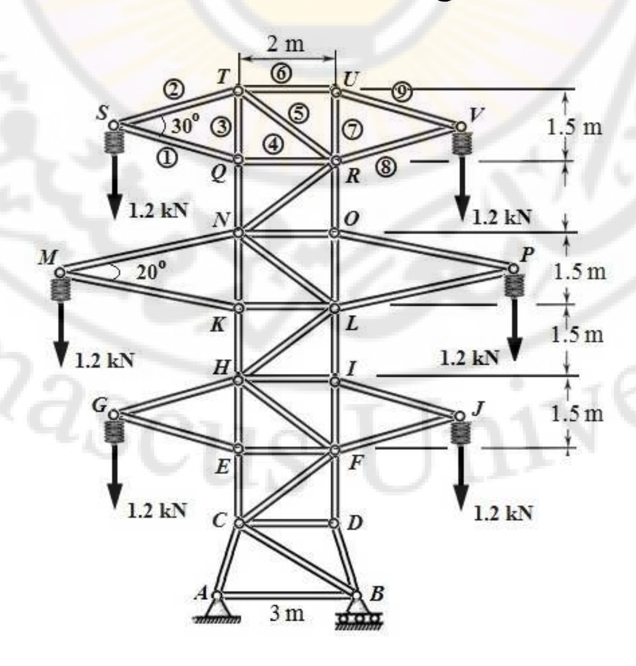


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
10.6 kN(←)	6.87 (↑)	13.73 (↑)	6.87	-9.72	17.46	-5.28	-13.73

مسألة رقم (12) :

أوجد بالطريقة التي تراها مناسبة القوى الداخلية المؤثرة في الأضلاع (1,2,3,4,5,6,7,8,9) من البرج المحمَّل والمحمول كما في الشكل المرافق .



الفصل الرابع

توازن القوى الفراغية

EQUILIBRIUM OF FORCES IN SPACE

4–1 اختزال القوى الى أبسط شكل ممكن : (Force Reduction)

يمكننا كما هو واضح في الشكل (4–1) اختزال مجموعة من القوى الفراغية المؤثرة في جسم ما بطريقة مماثلة للطريقة التي استخدمت في حالة القوى الواقعة في مستوٍ واحد . ويجري عادة اختزال جملة القوى الفراغية إلى القوة **R** والمزدوجة **M** بالنسبة لمركز تحويل كيفي ، كمركز جملة الإحداثيات الديكارتية o مثلاً ، باستخدام العلاقات الآتية :

$$\mathbf{R} = (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k} \qquad (1)$$

$$\mathbf{M} = (\Sigma M_x)\mathbf{i} + (\Sigma M_y)\mathbf{j} + (\Sigma M_z)\mathbf{k} \qquad (2)$$

حيث :

ΣF_x المجموع الجبري لمساقط القوى المفروضة على محور الإحداثيات x .

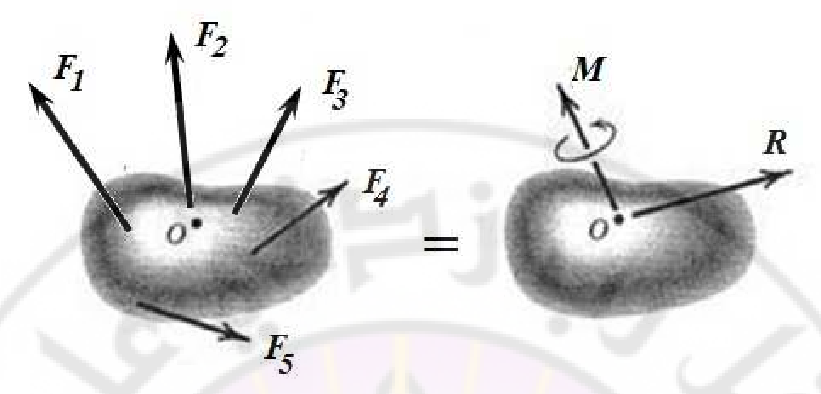
ΣF_y المجموع الجبري لمساقط القوى المفروضة على محور الإحداثيات y .

ΣF_z المجموع الجبري لمساقط القوى المفروضة على محور الإحداثيات z .

ΣM_x المجموع الجبري لعزوم القوى المفروضة حول محور الإحداثيات x .

ΣM_y المجموع الجبري لعزوم القوى المفروضة حول محور الإحداثيات y .

ΣM_z المجموع الجبري لعزوم القوى المفروضة حول محور الإحداثيات z .



الشكل (4−1)

وعند تحويل مجموعة قوى فراغية إلى أبسط شكل ممكن ، فإننا نلاحظ إحدى الحالتين الآتيتين :

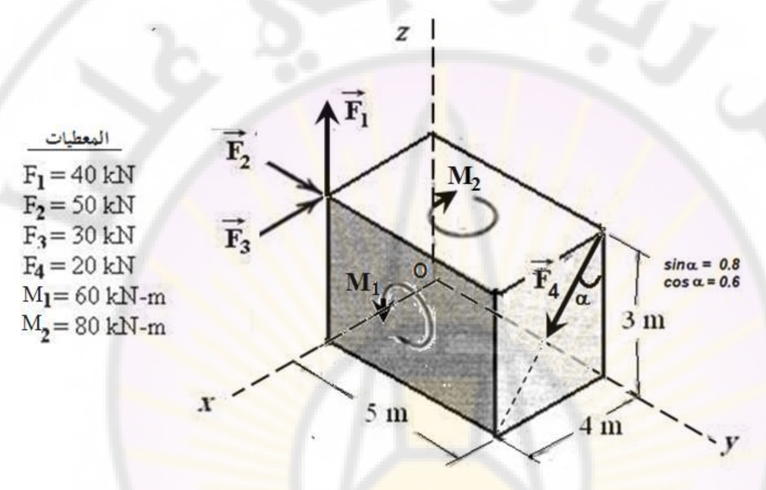
- الحالة الأولى : ويكون فيها الجداء العددي (السُّلَّمي) **R.M = 0** . في هذه الحالة تتحول مجموعة القوى المفروضة إما إلى قوة **R** فقط ، وإما إلى مزدوجة **M** فقط ، أو أن مجموعة القوى تقع في حالة توازن **(R=0 , M=0)** .
- الحالة الثانية : ويكون فيها الجداء العددي (السُّلَّمي) **R.M ≠ 0** . في هذه الحالة تتحول مجموعة القوى المفروضة إلى لولب حركي ، أي أن الجسم الذي يقع تحت تأثيرها تكون حركته لولبية .

يُبيّن المثال رقم (22) كيفية تحويل مجموعة قوى فراغية إلى أبسط شكل ممكن . وفي هذا المضمار ينبغي الانتباه عند حساب عزم قوة ما بالنسبة لأحد المحاور الإحداثية القائمة إلى الملاحظات الآتية :

- إذا كانت القوة موازية لمحور الإحداثيات المختار فإن عزمها حوله يساوي صفراً.
- إذا كان خط تأثير القوة يقطع محور الإحداثيات المختار فإن عزمها حوله يساوي صفراً أيضاً.
- إذا كان اتجاه القوة عمودياً على محور الإحداثيات المختار فإن عزمها يساوي جداء مقدار هذه القوة في بُعْدِها (أقصر مسافة) عن ذلك المحور.

مثال رقم (23)

يبين الشكل متوازي مستطيلات يخضع لتأثير أربع قوى ومزدوجتين . المزدوجة M_1 تقع في مستو يوازي المستوي oyz بينما تقع المزدوجة M_2 تقع في مستو يوازي المستوي oxy . والمطلوب هو تحويل هذه المجموعة إلى أبسط شكل ممكن.



الحل : ....

تتحدد محصلة مجموعة من القوى الفراغية بالعلاقتين :

$$\mathbf{R} = (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{M} = (\Sigma M_x)\mathbf{i} + (\Sigma M_y)\mathbf{j} + (\Sigma M_z)\mathbf{k}$$

ولتسهيل الحل نقوم أولاً بحساب مساقط القوى وعزومها بالنسبة للمحاور الإحداثية باستخدام الجدول الآتي :

		F_1	F_2	F_3	F_4
المساقط	x	0	0	-30	20(0.8)
	y	0	50	0	0
	z	40	0	0	-20(0.6)
العزوم	M_x	0	-50(3)	0	-12(5)
	M_y	- 40(4)	0	-30(3)	16(3)
	M_z	0	50(4)	0	-16(5)

عندئذ يمكن أن نكتب :

$\Sigma F_x = - 30 + 16 = -14$ kN
$\Sigma F_y = 50$ kN
$\Sigma F_z = 40 - 12 = 28$ kN
$\Sigma M_x = -50(3) - 12 (5) + 60 = -150$ kN.m
$\Sigma M_y = -40(4) - 30 (3) + 16 (3) = -202$ kN.m
$\Sigma M_z = 50(4)-16(5) - 80 = 40$ kN.m

$$\mathbf{R} = -14\mathbf{i} + 50\mathbf{j} + 28\mathbf{k}$$
$$\mathbf{M} = -150\mathbf{i} - 202\mathbf{j} + 40\mathbf{k} \text{ N-m}$$

بما أن **R** و **M** لا يساويان الصفر فإنه من الضروري حساب الجداء الآتي:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = \Sigma F_x \cdot \Sigma M_x + \Sigma F_y \cdot \Sigma M_y + \Sigma F_z \cdot \Sigma M_z$$
$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = -14\,(-150) + 50\,(-202) + 28\,(40) = -6880$$

وبما أن هذا الجداء لا يساوي صفراً فإن المتجهين **R** و **M** غير متعامدين ولهذا فإن مجموعة القوى المفروضة تتحول إلى لولب حركي .

2–4 معادلات التوازن :(Equations of Equilibrium)

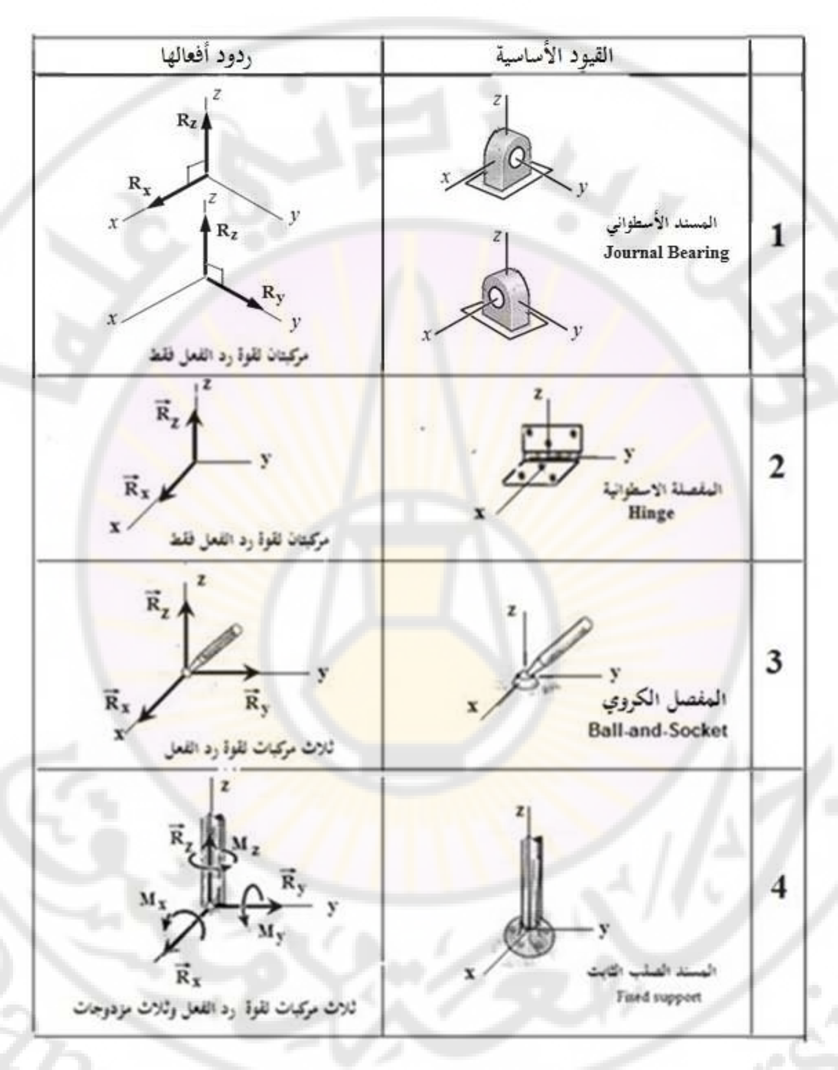
إن دراسة توازن جسم صلب يخضع لتأثير مجموعة من القوى الفراغية لا تختلف عن دراسة توازن جسم صلب يخضع لتأثير مجموعة من القوى المستوية . الفرق الوحيد هو أن عدد المجاهيل وعدد المعادلات يكون أكبر عند دراسة أنظمة القوى ذات الأبعاد الثلاثة . وبما أننا نستطيع على وجه العموم تحويل أية مجموعة من القوى الفراغية إلى جملة مكافئة أبسط تتألف من قوة **R** تساوي $\Sigma \mathbf{F}$ ومزدوجة **M** عزمها يساوي $\Sigma \mathbf{M_o}$ عندئذ نحصل على معادلتي التوازن بالصيغة الشعاعية الآتية :

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad (3)$$
$$\Sigma \mathbf{M_o} = \mathbf{0} \qquad (4)$$

وفي حل المسائل يجري عادة استخدام جملة المعادلات الجبرية البسيطة الآتية :

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad (5)$$
$$\Sigma F_z = 0 \qquad \Sigma M_z = 0$$

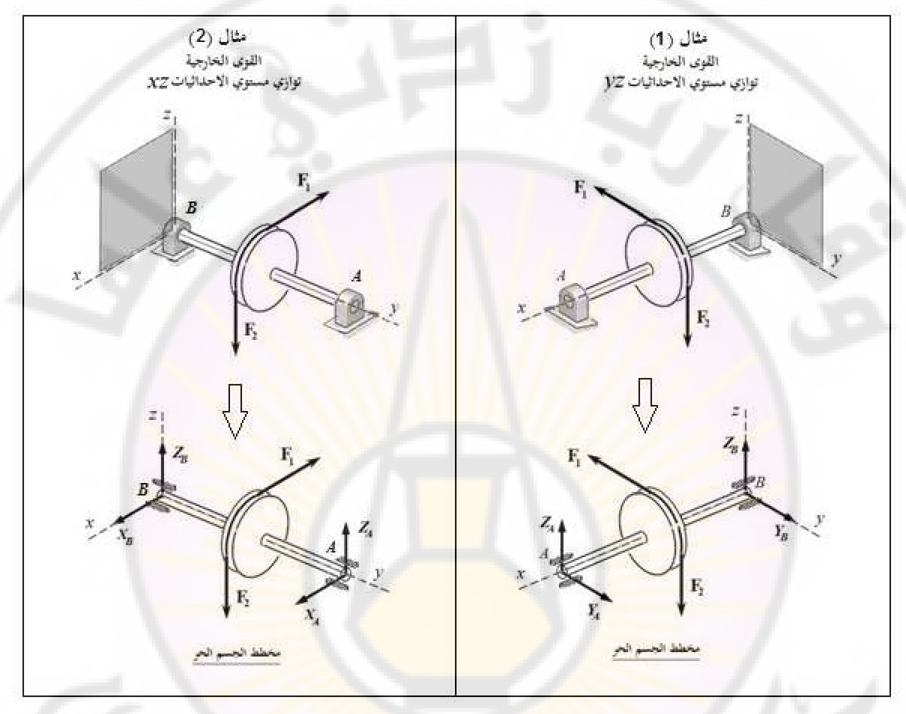
يبين الشكل (4-2) كيفية تحديد ردود الأفعال في الأنواع المختلفة للمساند والقيود التي تصادفنا في المسائل الفراغية ، وتشمل الآتي :



الشكل(4-2)

1. المسند الاسطواني (Journal Bearing) : عندما يقيد جسم بمسند اسطواني، ويخضع في الوقت نفسه لتأثير قوى خارجية أشعتها موازية لمستو معين ، فإن رد الفعل يكون مجهول الاتجاه ، ويحلَّل عند حل المسائل إلى مركبتين باتجاه المحورين المتعامدين

مع محور ذلك الجسم. وهنا سينحصر اهتمامنا على المسائل التي تكون فيها أشعة القوى الخارجية موازية لأحد المستويين (yz) أو (xz) من مستويات جملة الإحداثيات القائمة كما هو واضح في الشكل (3-4).



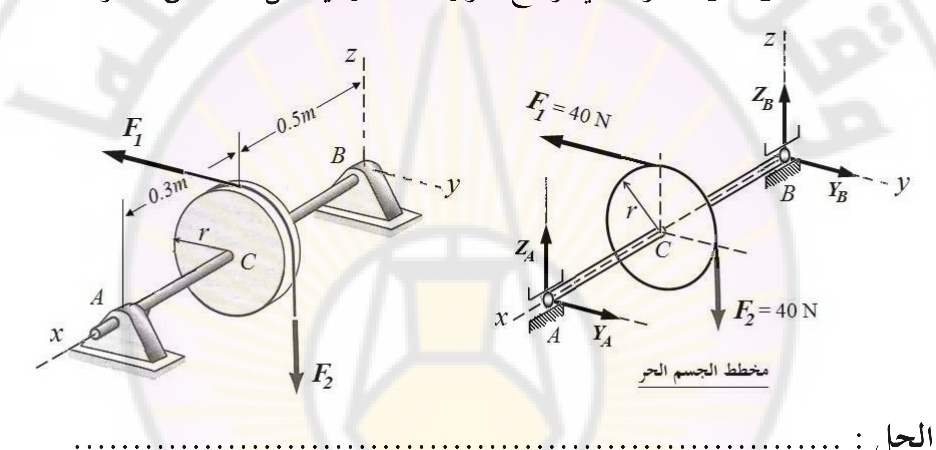
الشكل(3-4)

2. المفصلة الاسطوانية (Hinge) : عندما يقيد جسم ثلاثي الأبعاد بمفصلة اسطوانية، ويخضع في الوقت نفسه لتأثير قوى خارجية من النوع المذكور سابقاً ، فإن رد الفعل يكون مجهول الاتجاه ويحلل عندئذ إلى مركبتين كما هو مبين في الشكل .
3. المفصل الكروي (Ball-and-Socket) : عندما يقيد جسم ثلاثي الأبعاد بمفصل كروي ، فإن رد الفعل يكون مجهول الاتجاه لذا يحلل إلى ثلاث مركبات.
4. المسند الصلب الثابت لجسم ثلاثي الأبعاد (Fixed support) : عندما يثبت طرف جسم ثلاثي الأبعاد بشكل صلب ، فإن رد الفعل يكافئ ثلاث مركبات لقوة رد الفعل وثلاث مزدوجات.

توضح الأمثلة المحلولة الآتية كيفية استخدام شروط التوازن في حل المسائل المتعلقة بأنظمة القوى ذات الأبعاد الثلاثة .

مثال رقم (24)

يبين الشكل عموداً يرتكز على مسندين اسطوانيين A وB .وتؤثر في البكرة المثبتة في منتصف هذا العمود قوتان إحداهما أفقية F_1 توازي المحور y والثانية شاقولية F_2. فإذا كانت $F_1=F_2=40N$ فأوجد في وضع التوازن المبين ردي فعل المسندين A وB.



الحل : ....

نبدأ الحل باعتبار العمود مع البكرة جسماً حراً كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب مساقط القوى وعزومها بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية وذلك باستخدام الجدول الآتي :

	Y_A	Z_A	Y_B	Z_B	F_1	F_2
X	0	0	0	0	0	0
Y	Y_A	0	Y_B	0	- 40	0
Z	0	Z_A	0	Z_B	0	-40
M_x	0	0	0	0	40(r)	-40(r)
M_y	0	$-Z_A(0.8)$	0	0	0	40(0.5)
M_z	$Y_A(0.8)$	0	0	0	- 40(0.5)	0

واستناداً إلى معطيات هذا الجدول نكتب معادلات التوازن الآتية :

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A + Y_B - 40 = 0$$

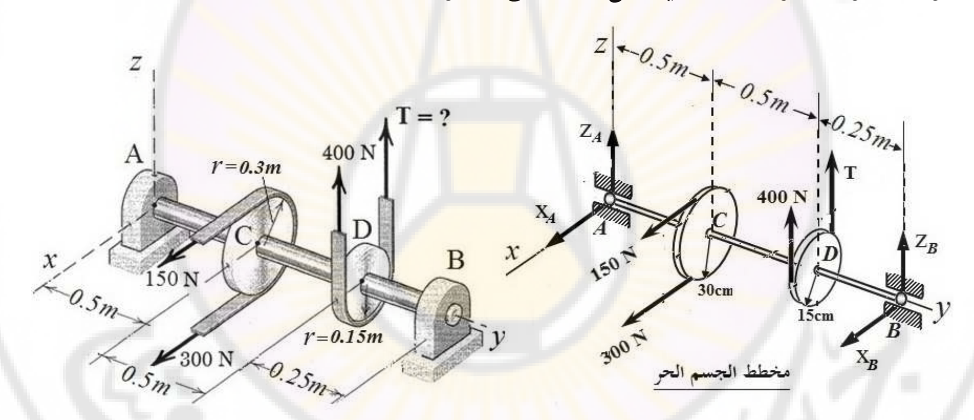
$$\Sigma F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A + Z_B - 40 = 0$$
$$\Sigma M_y = 0 \quad \Rightarrow \; - Z_A (0.8) + 40(0.5) = 0$$
$$\Sigma M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad -Y_A(0.8) - 40(0.5) = 0$$

وبحل هذه المعادلات نجد :

Y_A	Z_A	Y_B	Z_B
25 N	25 N	15 N	15 N

مثال رقم (25)

يبيّن الشكل عموداً AB ثُبِّتت عليه البكرتان C و D ويرتكز على مسندين اسطوانيين A و B. تؤثر على هذه الجملة مجموعة من القوى الخارجية . المطلوب : أوجد في وضع التوازن القوة T وكذلك ردي فعل المسندين A وB .



الحل : ....

نبدأ الحل باعتبار العمود مع البكرتين جسماً حراً كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب مساقط القوى وعزومها بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية وذلك باستخدام الجدول الآتي :

	X_A	Z_A	X_B	Z_B	150N	300N	T	400N
X	X_A	0	X_B	0	150	300	0	0
Y	0	0	0	0	0	0	0	0
Z	0	Z_A	0	Z_B	0	0	T	400
M_x	0	0	0	$Z_B(1.25)$	0	0	T(1)	400(1)
M_y	0	0	0	0	150(0.3)	-300(0.3)	T(0.15)	-400(0.15)
M_z	0	0	$-X_B(1.25)$	0	-150(0.5)	-300(0.5)	0	0

واستناداً إلى معطيات هذا الجدول نكتب معادلات التوازن الآتية :

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A + X_B + 150+300 = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A + Z_B + T + 400 = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_B (1.25) + T(1) + 400(1) = 0$$
$$\Sigma M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 150(0.3) - 300(0.3) + T(0.15) - 400(0.15) = 0$$
$$\Sigma M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad - X_B(1.25) - 150(0.5) - 300(0.5) = 0$$

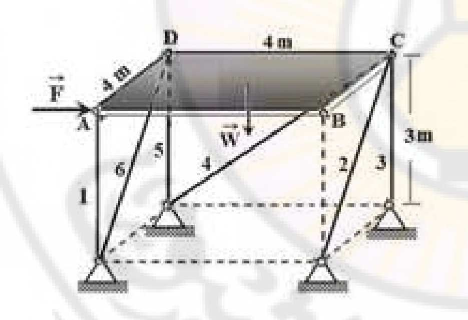
وبحل هذه المعادلات نجد :

T	X_A	Z_A	X_B	Z_B
700 N	-270 N	-220 N	- 180 N	-880 N

تشير الإشارة السالبة لكل من القوى : X_A و Z_A و X_B و Z_B إلى أن الاتجاه الفعلي لها هو بعكس الاتجاه المفروض في مخطط الجسم الحر.

مثال رقم (26)

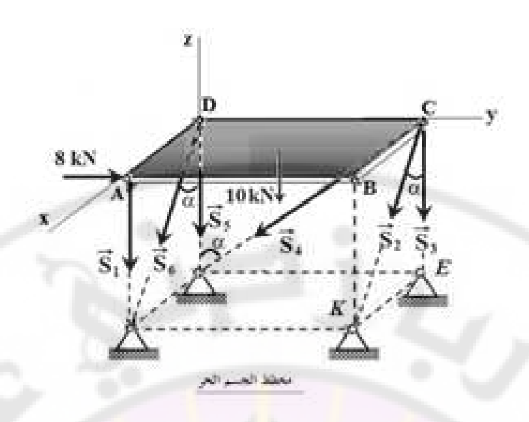
صفيحة ABCD متجانسة وأفقية وزنها W=10 kN ، ثُبِّتت على ستة قضبان كما هو موضح في الشكل . أوجد القوى الداخلية المتولدة في القضبان إذا علمت أن القوة الأفقية **F** تساوي 8 kN والأبعاد موضحة في الشكل .



الحل : ....

مخطط الجسم الحر : ندرس توازن الصفيحة ABCD لهذا نفرض أن جميع القضبان في حالة شد ثم نرسم مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل . نلاحظ من المثلث القائم CEK ما يلي :

$$CK = 5\,m \;\; \Rightarrow \;\; \sin\alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \;\; ; \;\; \cos\alpha = 0.6$$



مخطط الجسم الحر

ثم نكتب معادلات التوازن بعد حساب مساقط وعزوم القوى باستخدام الجدول الآتي :

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	F	W
X	0	$S_2(0.8)$	0	0	0	$S_6(0.8)$	0	0
Y	0	0	0	$-S_4(0.8)$	0	0	8	0
Z	$-S_1$	$-S_2(0.6)$	$-S_3$	$-S_4(0.6)$	$-S_5$	$-S_6(0.6)$	0	-10
M_x	0	$-S_2(0.6)(4)$	$-S_3(4)$	$-S_4(0.6)(4)$	0	0	0	-10(2)
M_y	$S_1(4)$	0	0	0	0	0	0	10(2)
M_z	0	$-S_2(0.8)(4)$	0	0	0	0	8(4)	0

معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow S_2 \sin\alpha + S_6 \sin\alpha = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -S_4 \sin\alpha + 8 = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow -S_1 - S_2 \cos\alpha - S_3 - S_4 \cos\alpha - S_5 - S_6 \cos\alpha - 10 = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow -S_2 \cos\alpha (4) - S_3 (4) - S_4 \cos\alpha (4) - 10 (2) = 0$$
$$\Sigma M_y = 0 \Rightarrow S_1 (4) + 10(2) = 0$$
$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow -S_2 \sin\alpha (4) + 8(4) = 0$$

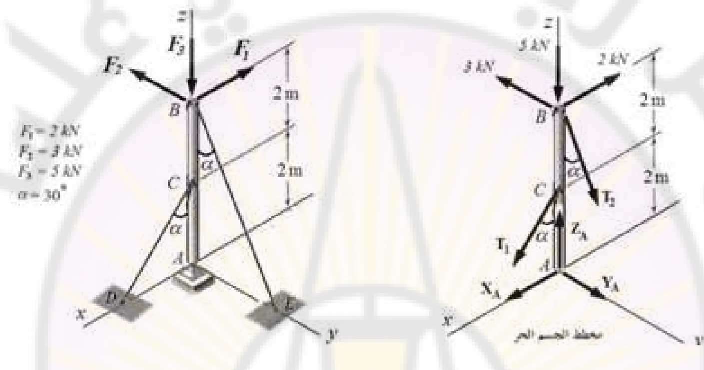
وبحل هذه المعادلات نجد :

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
- 5 kN	10 kN	-17 kN	10 kN	6 Kn	-10 kN

تبين هذه النتيجة أن القضبان : 1 و3 و 6 في حالة ضغط ، وأن القضبان : 2 و4 و5 في حالة شدّ .

مثال رقم (27)

يبين الشكل عموداً AB يقع تحت تأثير ثلاث قوى خارجية F_1 و F_2 و F_3 .يثبت هذا العمود في النقطة A بمفصل كروي (Ball-and-Socket) ويحافظ على توازنه بمساعدة الكبلين CD و CE . أوجد قوتي الشدّ المتولدتين في الكبلين ، ومركّبات رد فعل المفصل الكروي A .



الحل : ....

مخطط الجسم الحر : نرسم مخطط الجسم الحر للعمود AB كما هو مبين في الشكل ثم نكتب بعد ذلك معادلات التوازن .

معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A + T_1 \sin 30° - 2 = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A + T_2 \sin 30° - 3 = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A - T_1 \cos 30° - T_2 \cos 30° - 5 = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -T_2 \sin 30° (4) + 3(4) = 0$$
$$\Sigma M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 \sin 30° (2) - 2(4) = 0$$

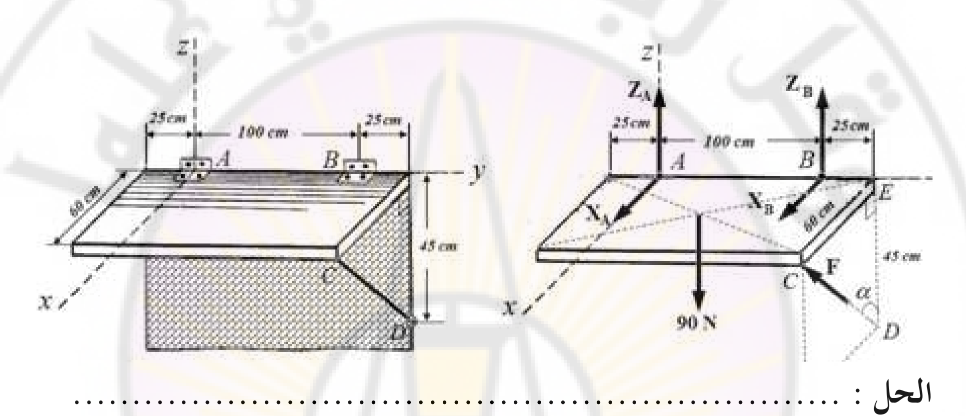
وبحل هذه المعادلات نجد :

T_1	T_2	X_A	Y_A	Z_A
8 kN	6 kN	-2 kN	0	7.12 kN

الإشارة السالبة للقوة X_A تشير إلى أن الاتجاه الفعلي لها هو بعكس الاتجاه المفروض في مخطط الجسم الحر.

مثال رقم (28)

لوح متجانس شكله مستطيل ووزنه 90N . ثُبِّت في الحائط بمساعدة المفصلتين الاسطوانيتين A وB ، ويحتفظ بوضع أفقي بمساعدة الذراع CD كما هو مبين في الشكل. أوجد مقدار الإجهاد **F** في الذراع CD ،وكذلك مركّبات ردي فعل المفصلتين A وB .



الحل : ....

مخطط الجسم الحر : نرسم مخطط الجسم الحر للوح كما هو مبين في الشكل ، ثم نكتب بعد ذلك معادلات التوازن .نلاحظ من المثلث القائم CED ما يلي :

$$CD = 75\ cm \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = 0.8 \quad ; \quad \cos\alpha = 0.6$$

معادلات التوازن :

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A + X_B + F \sin\alpha = 0$

$\Sigma F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A + Z_B - 90 + F \cos\alpha = 0$

$\Sigma M_x = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_B (100) + F \cos\alpha (125) - 90(50) = 0$

$\Sigma M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -F \cos\alpha (60) + 90 (30) = 0$

$\Sigma M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad - X_B (100) - F \sin\alpha\ (125) = 0$

وبحل هذه المعادلات نجد :

F	X_A	Z_A	X_B	Z_B
75 N	15 N	56.25 N	-75 N	-11.25 N

3–4 حل المسائل بالطريقة الشعاعية :(Vector solution)

أشعة الواحدة (Unit vectors): يدعى المتّجه الذي طوله يساوي الواحد بشعاع الواحدة ، ويتجه وفق الاتجاه الموجب للمحور الموجه . إن لكل محور Axis شعاع واحدة طوله يساوي تدريجة واحدة من تدريجات ذلك المحور . ليكن لدينا مثلاً المحور المبين في الشكل (4–4) ، وبفرض أن الحرف الغامق **u** هو شعاع الواحدة الخاص بهذا المحور ، وليكن **F** شعاعاً آخر محمولاً على المحور نفسه. فإذا رمزنا للقيمة المطلقة للشعاع بالحرف العادي الفاتح F (بلا سهم) وكان طوله كما هو موضح في الشكل يساوي ثلاث تدريجات (F=3) فيكون عندئذ :

$$\vec{\boldsymbol{F}} = 3\,\vec{\boldsymbol{u}} = F\,\vec{\boldsymbol{u}} \qquad (6)$$

شعاع الواحدة
$\vec{u}$
$\vec{F} = 3\,\vec{u}$
محور مدرّج

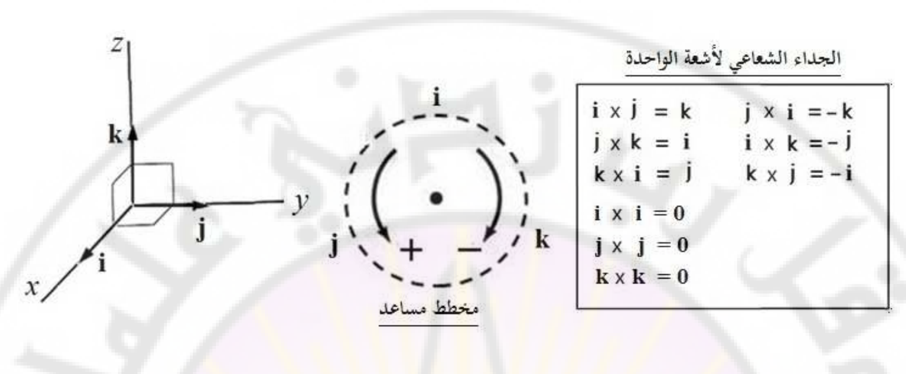
الشكل (4–4)

وبناءً على ذلك يمكن أن نكتب العلاقة الشعاعية المهمة الآتية :

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{F} \qquad (7)$$

ولشعاع الواحدة أهمية بالغة في المسائل كما سنرى فيما بعد . ويطلق على أشعة الواحدة المنطبقة على المحاور الثلاثة المتعامدة x وy و z بأشعة الواحدة الأساسية ويرمز لها بالأحرف **i** و**j** و **k** كما هو مبين في الشكل (4–5) . أي أن **i** متّجه مقداره الواحد وينطبق على الاتجاه الموجب للمحور x ، وكذلك **j** متّجه مقداره الواحد وينطبق على الاتجاه الموجب للمحور y ، وأخيراً **k** متّجه مقداره الواحد وينطبق على الاتجاه الموجب

للمحور **z** . كما يعرض الشكل المذكور آنفاً علاقات الجداء الشعاعي لأشعة الواحدة الضرورية لحل المسائل الفراغية بالطريقة الشعاعية .

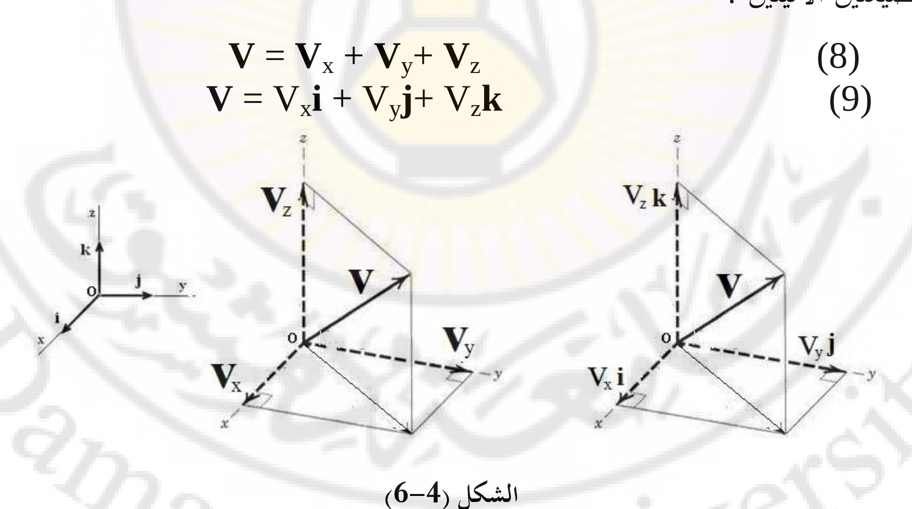


الشكل (4–5)

وإذا كان لشعاع ما **V** كما هو مبين في الشكل (4–6) ثلاث مركبات مقاديرها $\mathbf{V}_x$ و $\mathbf{V}_y$ و $\mathbf{V}_z$ في اتجاه المحاور المتعامدة x و y و z فإنه يمكن التعبير عن هذا الشعاع بإحدى الصيغتين الآتيتين :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y + \mathbf{V}_z \qquad (8)$$

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k} \qquad (9)$$



الشكل (4–6)

شعاع أو متّجه الموضع (Position Vector): شعاع الموضع لنقطة ما A هو قطعة مستقيمة موجهة من نقطة مرجعية ، كمبدأ الإحداثيات ، إلى النقطة A . ويرمز له بالرمز $\mathbf{r}_A$ كما هو مبين في الشكل (4–7) . إذا كانت x وy و z هي إحداثيات

النقطة A منسوبة لجملة محاور إحداثية متعامدة فتكون حينئذ الصيغة الشعاعية لشعاع الموضع هي :

$$\mathbf{r}_A = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \qquad (10)$$

وطول الشعاع r_A هو المسافة الواصلة بين مبدأ الإحداثيات والنقطة A ، ويحسب عادة من العلاقة الآتية :

$$r_A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (11)$$

يدعى الشعاع الذي يصل بين نقطتين A و B ويتجه من A إلى B بشعاع الانتقال $\mathbf{r}_{AB}$ ويتحدد كما يلي :

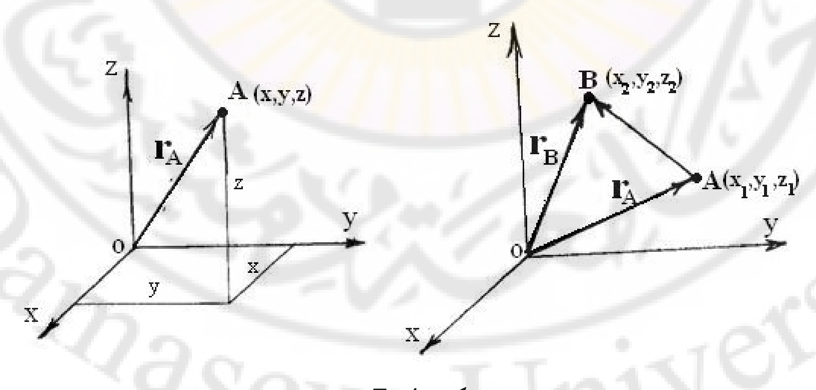
$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \qquad (12)$$

وبدلالة إحداثيات النقطتين المذكورتين يكون شعاع الانتقال :

$$\mathbf{r}_{AB} = (x_2-x_1)\,\mathbf{i} + (y_2-y_1)\,\mathbf{j} + (z_2-z_1)\,\mathbf{k} \qquad (13)$$

ويحسب مقداره بالعلاقة :

$$r_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (14)$$



الشكل (4–7)

شعاع أو متّجه القوة (Force Vector): ليكن شعاع او متّجه القوة **F** المبين في الشكل(4–8) والمنسوب لجملة محاور إحداثية متعامدة oxyz . فإذا فرضنا أن هذا

الشعاع يصنع الزوايا θ_x و θ_y و θ_z مع المحاور ، وأن مساقطه هي F_x و F_y و F_z في اتجاه المحاور x وy و z فإنه يمكن التعبير عن الشعاع المذكور بالمجموع الشعاعي الآتي :

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \qquad (15)$$

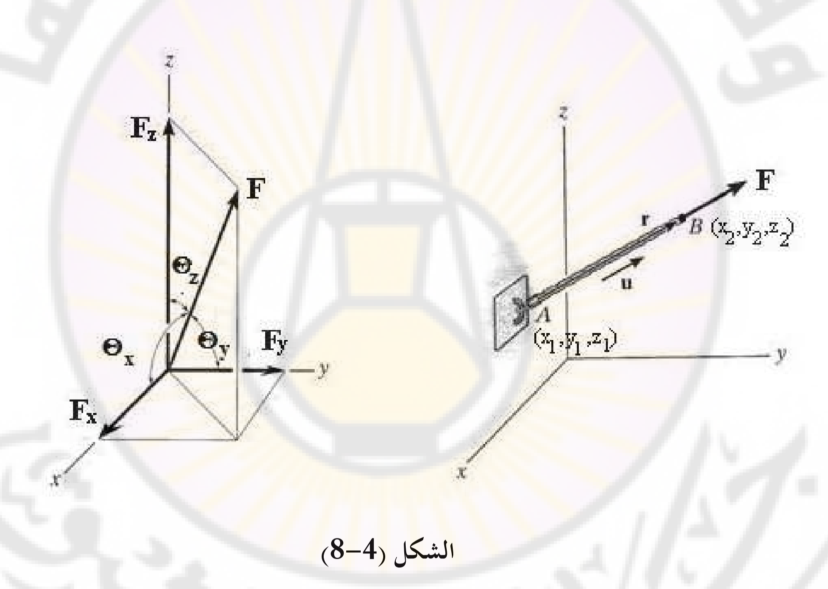
حيث :

$$F_x = F \cos \theta_x \qquad (16)$$

$$F_y = F \cos \theta_y \qquad (17)$$

$$F_z = F \cos \theta_z \qquad (18)$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \qquad (19)$$



الشكل (4–8)

ولا بد من الإشارة إلى الحالة التي تصادفنا في حل المسائل ولاسيّما المتعلقة بالقوى الفراغية، وهي عندما يمر حامل قوة ما **F** من نقطتين $A(x_1,y_1,z_1)$ و$B(x_2,y_2,z_2)$ إحداثياتهما معلومة كما هو مبين في الشكل السابق . نستطيع في هذه الحالة تعيين شعاع القوة بدلالة شعاع الواحدة **u** المنسوب إلى المحور الحامل للقوة والمار بالنقطتين المذكورتين آنفاً كما يلي:

$$\mathbf{F} = \mathrm{F}\,\mathbf{u} = \mathrm{F}\left(\frac{\mathbf{r_{AB}}}{\mathrm{r_{AB}}}\right) \qquad (20)$$

أو بشكل آخر :

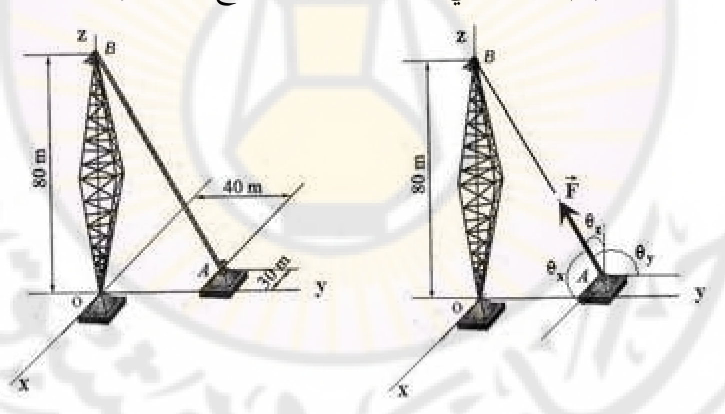
$$\boldsymbol{F} = F\left[\frac{(x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\right] \qquad (21)$$

وبناء على ما سبق نجد أن :

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

مثال رقم (29)

يبين الشكل برجاً ارتفاعه 80 m . إذا علمت أن قوة الشد في السلك AB تساوي 2500 N فإن المطلوب : (1) تحديد المركبات الديكارتية المتعامدة لقوة الشد المؤثرة في نقطة التثبيت A . (2) الزوايا التي تصنعها قوة الشد مع محاور الإحداثيات.



الحل : ....

المركبات الديكارتية المتعامدة لقوة الشد : بما أن حامل قوة الشد يمر من النقطتين A وB وملاحظة أن إحداثيات هاتين النقطتين معلومة ، لذا يمكن تعيين هذه القوة كحاصل ضرب قيمتها العددية بشعاع الوحدة $\mathbf{u}_{AB}$

$$\mathbf{F} = F\,\mathbf{u}_{AB} = F\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{AB}\right)$$

$$\mathbf{F} = 2500\left[\frac{(0+30)\,\mathbf{i} + (0-40)\,\mathbf{j} + (80-0)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(30)^2+(-40)^2+(80)^2}}\right]$$

$$\mathbf{F} = 795\,\mathbf{i} - 1060\,\mathbf{j} + 2120\,\mathbf{k}$$

$$F_x = 795 \text{ N} \;;\; F_y = -1060 \text{ N} \;;\; F_z = 2120 \text{ N}$$

الزوايا التي تصنعها قوة الشد مع محاور الإحداثيات :

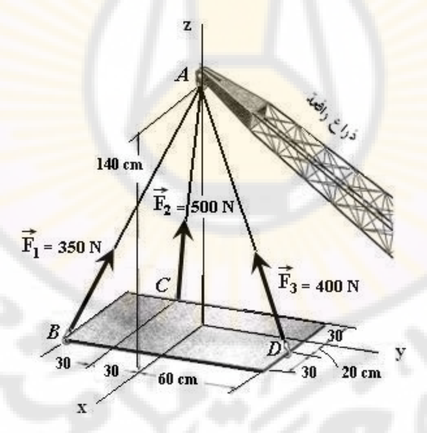
$$F_x = F\cos\theta_x \Rightarrow \cos\theta_x = 0.318 \Rightarrow \theta_x = 71.5°$$

$$F_y = F\cos\theta_y \Rightarrow \cos\theta_y = -0.424 \Rightarrow \theta_y = 115.1°$$

$$F_z = F\cos\theta_z \Rightarrow \cos\theta_z = 0.848 \Rightarrow \theta_z = 32.0°$$

مثال رقم (30)

يبين الشكل صفيحة معلّقة بمساعدة ثلاثة كابلات . اكتب الصيغ الشعاعية الديكارتية لقوى الشد التي تنشأ في الكابلات الثلاثة إذا علمت أن مقادير هذه القوى هي: F_1=350 N و F_2=500 N و F_3=400 N .



الحل : ....

قوة الشد في الكبل AB : بما أن قوة الشد F_1 تتجه من النقطة B(50,-60,0) إلى النقطة A(0,0,140) ، وملاحظة أن إحداثيات هاتين النقطتين معلومة ، لذا يمكن تعيين هذه القوة كحاصل ضرب قيمتها العددية بشعاع الوحدة $\mathbf{u}_{BA}$

$$\mathbf{F_1} = F_1\,\mathbf{u}_{BA} = F_1\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{BA}}}{BA}\right)$$

$$\mathbf{F_1} = 350\left[\frac{(0-50)\,\mathbf{i} + (0+60)\,\mathbf{j} + (140-0)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(-50)^2+(60)^2+(140)^2}}\right]$$

$$\mathbf{F_1} = -109\,\mathbf{i} + 131\,\mathbf{j} + 306\,\mathbf{k}$$

قوة الشد في الكبل AC : بما أن قوة الشد F_2 تتجه من النقطة C(-30,-30,0) إلى النقطة A(0,0,140) ، وملاحظة أن إحداثيات هاتين النقطتين معلومة ، لذا يمكن تعيين هذه القوة كحاصل ضرب قيمتها العددية بشعاع الوحدة $\mathbf{u}_{CA}$:

$$\mathbf{F_2} = F_2\,\mathbf{u}_{CA} = F_2\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{CA}}}{CA}\right)$$

$$\mathbf{F_2} = 500\left[\frac{(0+30)\,\mathbf{i} + (0+30)\,\mathbf{j} + (140-0)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(30)^2+(30)^2+(140)^2}}\right]$$

$$\mathbf{F_2} = 103\,\mathbf{i} + 103\,\mathbf{j} + 479\,\mathbf{k}$$

قوة الشد في الكبل AD : بما أن قوة الشد F_3 تتجه من النقطة D(20,60,0) إلى النقطة A(0,0,140) ، وملاحظة أن إحداثيات هاتين النقطتين معلومة ، لذا يمكن تعيين هذه القوة كحاصل ضرب قيمتها العددية بشعاع الوحدة $\mathbf{u}_{DA}$:

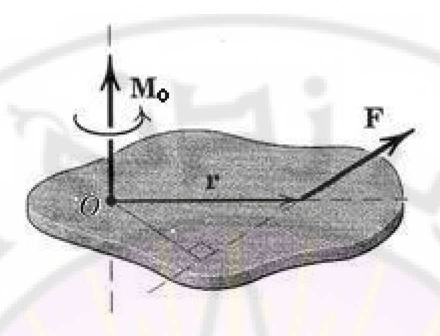
$$\mathbf{F_3} = F_3\,\mathbf{u}_{DA} = F_3\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{DA}}}{DA}\right)$$

$$\mathbf{F_3} = 400\left[\frac{(0-20)\,\mathbf{i} + (0-60)\,\mathbf{j} + (140-0)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(-20)^2+(-60)^2+(140)^2}}\right]$$

$$\mathbf{F_3} = -52\,\mathbf{i} + 156\,\mathbf{j} + 365\,\mathbf{k}$$

شعاع أو متّجه العزم (Moment Vector): إن عزم القوة حول نقطة ما كما هو مبين في الشكل(4-8) هو شعاع يساوي الجداء الشعاعي لشعاعين : الأول هو شعاع الموضع الذي يبدأ بهذه النقطة وينتهي بأية نقطة على حامل القوة ، والثاني هو القوة

نفسها. لهذا فإن نتيجة الجداء هي شعاع $\mathbf{M_O}$حامله عمودي على المستوي الذي يضم شعاعي الموضع والقوة .



الشكل (4–9)

وانطلاقاً من هذا التعريف يمكن تعيين عزم القوة $\mathbf{F}$ بالنسبة للنقطة O كما هو مبين في الشكل(4–9) باستخدام العلاقات الآتية :

بفرض أن :

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$$

فيكون عندئذ :

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} y & z \\ Fy & Fz \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} x & z \\ Fx & Fz \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} x & y \\ Fx & Fy \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M_O} = (yF_z - zF_y)\,\mathbf{i} - (xF_z - zF_x)\,\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\,\mathbf{k} \qquad (22)$$

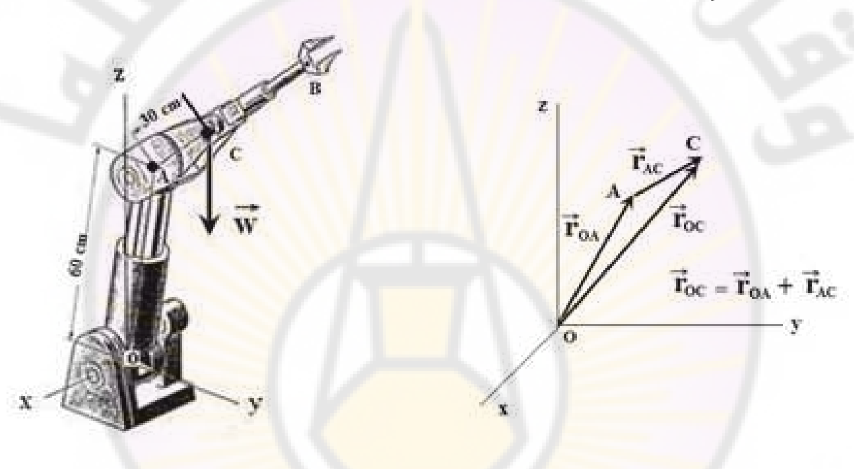
أو بشكل آخر:

$$\mathbf{M_O} = M_x\,\mathbf{i} + M_y\,\mathbf{j} + M_z\,\mathbf{k} \qquad (23)$$

حيث تمثل M_x و M_y و M_z مركبات العزم $\mathbf{M_O}$ في اتجاه المحاور x وy و z .

مثال رقم (31)

يبين الشكل إنساناً آلياً Robot . تؤثر قوة W=160 N في النقطة C من الذراع AB. بفرض أن الذراع OA يصنع مع المحاور الإحداثية الزوايا الآتية $\theta_x=90°$ و $\theta_y=60°$ و $\theta_z=30°$ ، وأن الذراع AB يصنع مع المحاور الإحداثية الزوايا الآتية $\theta_x=90°$ و $\theta_y=30°$ و $\theta_z=60°$. المطلوب تحديد العزم الذي تولده القوة **W** حول النقطة O مبدأ الإحداثيات.



الحل : ....

يتعين شعاع الموضع $\mathbf{r_{OA}}$ كما يلي :

$$\mathbf{r_{OA}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r_{OA}} = 0.6\cos\theta_x\,\mathbf{i} + 0.6\cos\theta_y\,\mathbf{j} + 0.6\cos\theta_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r_{OA}} = 0.6\cos 90°\,\mathbf{i} + 0.6\cos 60°\,\mathbf{j} + 0.6\cos 30°\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r_{OA}} = 0.3\,\mathbf{j} + 0.52\,\mathbf{k}$$

ويتحدد شعاع الموضع $\mathbf{r_{AC}}$ بصورة مشابهة كما يلي :

$$\mathbf{r_{AC}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r_{AC}} = 0.3\cos\theta_x\,\mathbf{i} + 0.3\cos\theta_y\,\mathbf{j} + 0.3\cos\theta_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r_{AC}} = 0.3\cos 90°\,\mathbf{i} + 0.3\cos 30°\,\mathbf{j} + 0.3\cos 60°\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r_{AC}} = 0.26\,\mathbf{j} + 0.15\,\mathbf{k}$$

وبناء على خواص المتجهات في الجمع يمكن أن نكتب :

$$\mathbf{r_{OC}} = \mathbf{r_{OA}} + \mathbf{r_{AC}}$$

$$\mathbf{r_{OC}} = (0.3\,\mathbf{j} + 0.52\,\mathbf{k}) + (0.26\,\mathbf{j} + 0.15\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r_{OC}} = 0.56\,\mathbf{j} + 0.67\,\mathbf{k}$$

ويتحدد العزم الذي تولده القوة **W** حول النقطة O كما يلي :

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r_{OC}} \times \mathbf{W}$$

وبما أن القوة **W** توازي المحور الشاقولي oz وتتجه نحو الأسفل لذا نكتب :

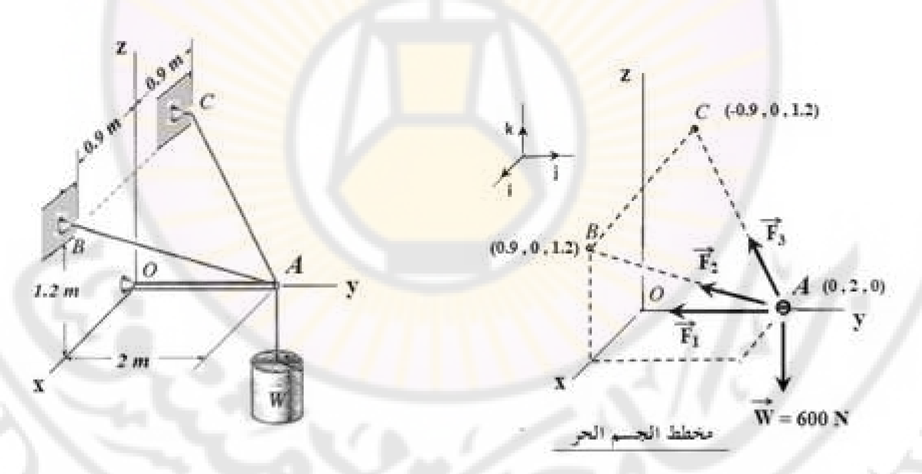
$$\mathbf{M_O} = (0.56\,\mathbf{j} + 0.67\,\mathbf{k}) \times (-160\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{M_O} = -89.6\,\mathbf{i}$$

تبين هذه النتيجة أن شعاع العزم يتجه وفق الاتجاه السالب للمحور ox

مثال رقم (32)

يُعلّق الحمل **W** بمساعدة الذراع OA وثلاثة أسلاك كما هو مبين في الشكل . المطلوب تعيين القوى الداخلية المتولدة في الذراع المذكور والسلكين AB و AC .



الحل : ....

مخطط الجسم الحر : ندرس توازن نقطة التعليق A . لهذا نرسم مخطط الجسم الحر لتلك النقطة كما هو مبين في الشكل ثم نكتب الصيغ الديكارتية الشعاعية لكافة القوى المؤثرة كما يلي :

$$\mathbf{W} = -600\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F_1} = -\mathrm{F}_1\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F_2} = F_2\left[\frac{0.9\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 1.2\,\mathbf{k}}{\sqrt{0.9^2+2^2+1.2^2}}\right] = F_2(0.36\,\mathbf{i} - 0.8\,\mathbf{j} - 0.48\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F_3} = F_3\left[\frac{-0.9\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 1.2\,\mathbf{k}}{\sqrt{0.9^2+2^2+1.2^2}}\right] = F_3(-0.36\,\mathbf{i} - 0.8\,\mathbf{j} + 0.48\,\mathbf{k})$$

معادلات التوازن : إن شرط توازن نقطة التعليق A هو :

$$\mathbf{\Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 + W = 0}$$

ويمكن كتابة الشرط السابق على النحو الآتي :

$$\mathbf{\Sigma F} = (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

بالتعويض نجد :

$$(0.36F_2 - 0.36F_3)\mathbf{i} + (-F_1 - 0.8F_2 - 0.8F_3)\mathbf{j} + (0.48F_2 + 0.48F_3 - 600)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

وبناء على ذلك يمكن أن نكتب :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 0.36F_2 - 0.36F_3 = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -F_1 - 0.8F_2 - 0.8F_3 = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow 0.48F_2 + 0.48F_3 - 600 = 0$$

وبحل هذه المعادلات نجد :

$$F_1 = -1000\text{ N} \;;\; F_2 = F_3 = 625\text{ N}$$

إشارة القوة F_1 السالبة تشير إلى أن الاتجاه الفعلي لهذه القوة هو بعكس الاتجاه المفروض في مخطط الجسم الحر.

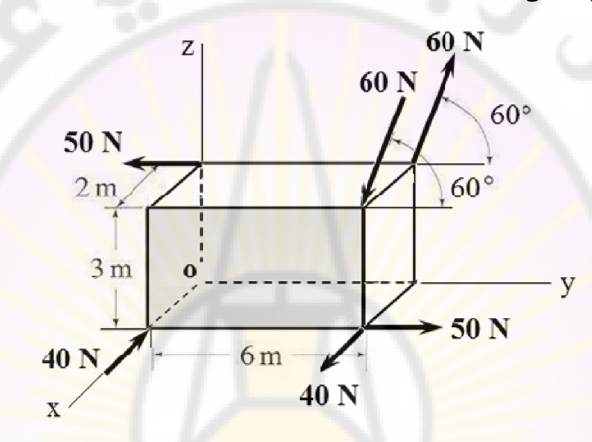
☹☹☹☹☹☹☹



مسائل غير محلولة
UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

المطلوب تحويل مجموعة القوى المؤثرة في رؤوس متوازي المستطيلات المبيّن في الشكل المرافق إلى أبسط شكل ممكن .



الجواب :

[$\mathbf{R} = \mathbf{0}$; $\mathbf{M_O} = 150\mathbf{i} + 103.9\mathbf{j} - 200\mathbf{k}$]

مسألة رقم (2) :

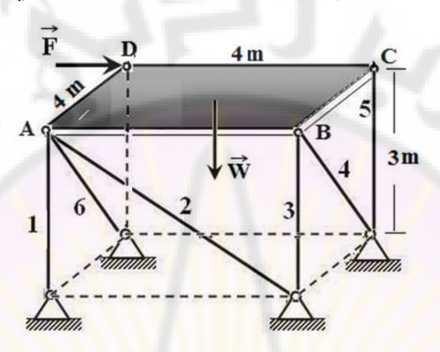
يحتفظ صندوق متجانس وزنه 5kN بوضعه الأفقي بمساعدة مجموعة البكرات والحبال المبينة في الشكل .إذا علمت أن وزن الحمل المربوط بالصندوق يساوي 15kN فأوجد عندئذ قوى الشد في الحبال الثلاثة.

الجواب :

$T_1 = T_2 = 5$ kN , $T_3 = 10$kN

مسألة رقم (3) :

صفيحة ABCD متجانسة وأفقية وزنها W=20 kN ، ثُبِّتت على ستة قضبان كما هو موضح في الشكل . والمطلوب هو تعيين القوى الداخلية المتولدة في القضبان إذا علمت أن القوة الأفقية **F** تساوي 12 kN والأبعاد موضحة في الشكل المرافق.

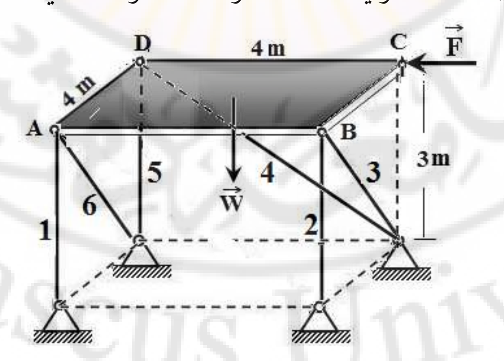


الجواب :

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
8 kN	-15 kN	-9 kN	15 kN	-10 kN	-15 kN

مسألة رقم (4) :

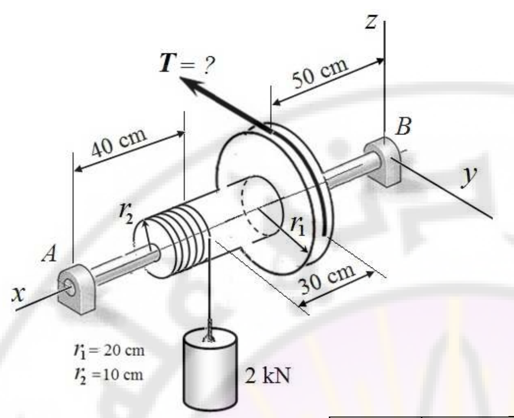
صفيحة ABCD متجانسة وأفقية وزنها W=30 kN ، ثُبِّتت على ستة قضبان كما هو موضح في الشكل . والمطلوب هو تعيين القوى الداخلية المتولدة في القضبان إذا علمت أن القوة الأفقية **F** تساوي 16 kN والأبعاد موضحة في الشكل المرافق .



الجواب :

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
0	-15 kN	0	20 kN	-27 kN	0

مسألة رقم (5) :

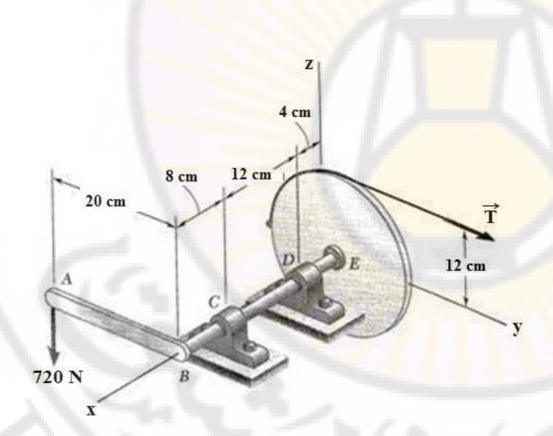


يقوم ملفاف برفع حمل مقداره 2kN كما هو موضح في الشكل المجاور . أوجد في وضع التوازن قوة الشد الأفقية T ومركّبات ردي فعل المسندين الاسطوانيين A و B .

الجواب :

T	Y_A	Z_A	Y_B	Z_B
1 kN	0.42 kN	1.33 kN	0.58 kN	0.67 kN

مسألة رقم (6) :



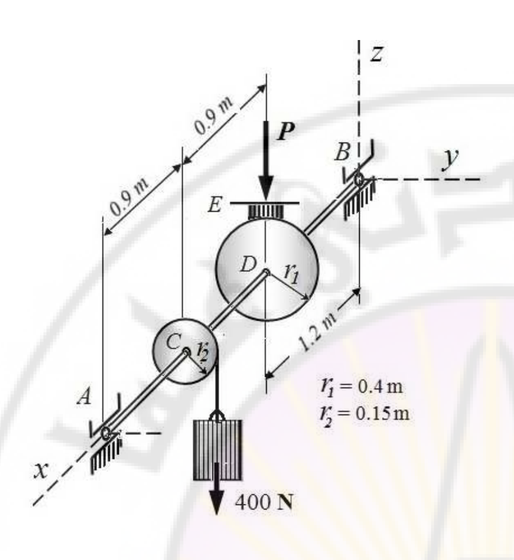
يبين الشكل عموداً BE ثُبِّت بنهايتيه بكرة وذراع ، ويرتكز على مسندين اسطوانيين CوD .تؤثر في الذراع AB قوة شاقولية مقدارها 720 N ، وتؤثر في الوقت نفسه في السلك الملفوف على البكرة قوة شد T.

في وضع التوازن الموافق للوضع الأفقي للذراع AB ، أوجد قوة الشد T وردي فعل المسندين C و D .

الجواب :

T	Y_C	Z_C	Y_D	Z_D
1200 N	400 N	1200 N	- 1600 N	- 480 N

مسألة رقم (7) :



يبين الشكل عموداً أفقياً يحمل البكرتين C و D ، ويرتكز على المسندين الاسطوانيين A و B. بفرض أن معامل الاحتكاك بين البكرة D وعنصر الاحتكاك E يساوي 0.2 فأوجد في وضع التوازن ما يلي:

1. القيمة الدنيا لقوة الضغط P اللازمة لمنع هبوط ثقل مقداره 400N .
2. مُركِّبات ردي فعل المسندين A وB .

الجواب :

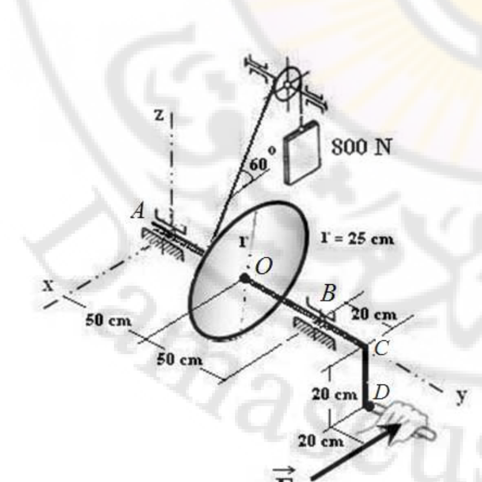
P	Y_A	Z_A	Y_B	Z_B
750 N	60 N	580 N	90 N	570 N

مسألة رقم (8) :



تأمّل الشكل المجاور ثم أوجد في وضع التوازن ما يلي:

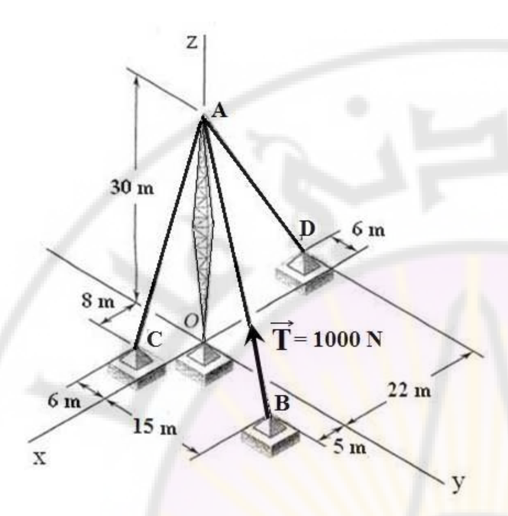
1. القوة الأفقية F اللازمة لمنع هبوط ثقل مقداره 800N .
2. مُركِّبات ردي فعل المسندين الاسطوانيين A وB .



الجواب :

F	X_A	Z_A	X_B	Z_B
1000 N	-200 N	-346 N	1600 N	-346 N

مسألة رقم (9) :

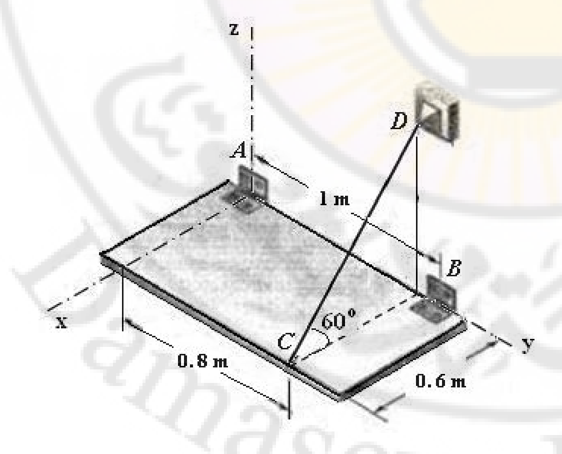


يبين الشكل المجاور برجاً لنقل الطاقة الكهربائية.يثبت هذا العمود في النقطة O بمفصل كروي (Ball-and-Socket) ويحافظ على توازنه بمساعدة ثلاثة أسلاك. إذا علمت أن قوة الشد **T** في السلك AB تساوي 1000 N فإن المطلوب : تحديد المركبات الديكارتية المتعامدة لقوة الشد المؤثرة في نقطة التثبيت B.

الجواب :

F_X = -147 N , F_Y = - 442 N , F_Z = 885 N

مسألة رقم (10) :



صفيحة متجانسة وزنها W=433 N ، وتحتفظ بوضع أفقي بمساعدة الكبل CD المثبت في الجدار كما هو موضح في الشكل . عيّن قوة الشد في الكبل CD ، وكذلك ردي فعل المفصلتين AوB .

الجواب :

T = 250 N , X_A = 25 N , Z_A = 173.2 N , X_B = 100 N , Z_B = 43.3 N

☺☺☺☺☺☺☺

الفصل الخامس

قوى الاحتكاك

FRICTION FORCES

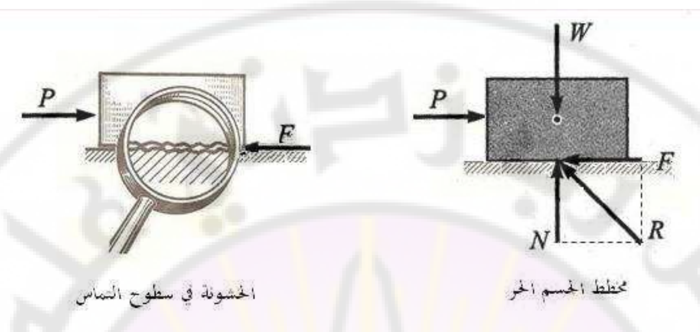
تمهيد : للاحتكاك في التطبيقات الهندسية ثلاثة أنواع وهي :

1. الاحتكاك الانزلاقي : ينشأ هذا النوع عند انزلاق جسم على جسم آخر.
2. احتكاك الحبال والسيور : ينشأ هذا النوع بفعل التلامس بين الحبال أو السيور من جهة والأجسام الدوارة كالبكرات من جهة أخرى .
3. الاحتكاك التدحرجي : ينشأ هذا النوع عند تدحرج جسم على جسم آخر.

1-5 الاحتكاك الانزلاقي (Sliding Friction) :

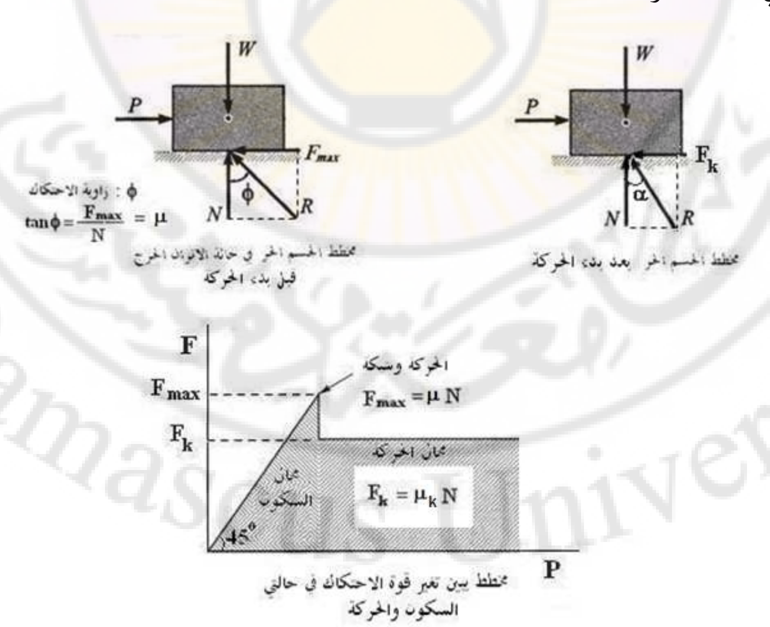
اعتمدت الدراسة السابقة على فرضية مفادها أن سطوح التماس ملساء ، وهذا يعني أنها عديمة الاحتكاك . في الواقع ، هذا الافتراض مثالي لأن سطوح الأجسام مهما بلغت دقة التصنيع تكون خشنة إلى حد ما. فعندما نحاول تحريك جسم على جسم آخر كما هو موضح في الشكل(5-1) فإن قوة تدعى قوة الاحتكاك سوف تنشأ في منطقة التماس بين الجسمين . وفي هذه الحالة سوف يخضع الجسم المفروض لتأثير ثلاث قوى وهي القوة الخارجية **P** وقوة الوزن **W** ورد فعل سطح الاستناد **R** الذي يمكن تحليله إلى

مركبتين وهما رد الفعل الناظمي **N** وقوة الاحتكاك المماسية **F** المعاكسة لجهة الحركة المحتملة .



الشكل(5-1)

تبين التجارب أنه إذا خضع جسم ما يرتكز على جسم آخر لقوة محركة P بحيث يمكن زيادتها تدريجياً فإن العلاقة بين قوة الاحتكاك والقوة المحركة ستكون كما هو مبين في الشكل(5-2). يتضمن المخطط مجالين : المجال الأول يمثل حالة السكون بينما يمثل المجال الثاني حالة الحركة.



الشكل(5-2)

نلاحظ من هذا المخطط أنه في البدء كلما زادت القوة $\boldsymbol{P}$ ازدادت قوة الاحتكاك $\boldsymbol{F}$ إلى أن تصل إلى قيمتها العظمى $\boldsymbol{F_{max}}$ ، وهي اللحظة التي يصبح فيها الجسم المفروض على وشك الانزلاق وبدء الحركة. بعدها ، وحالما يبدأ الجسم بالحركة فإن قوة الاحتكاك تنخفض فجأة ثم تحافظ على قيمتها ثابتة في مجال السرعات المنخفضة . تسمى قوة الاحتكاك بعد بدء الحركة بقوة الاحتكاك الحركي ويرمز لها $\boldsymbol{F_k}$.كما يوضح الشكل المذكور سابقاً مخطط الجسم المفروض الحر في حالتي السكون والحركة . وتتعين قوة الاحتكاك القصوى التي تنشأ عندما تكون الحركة على وشك الحدوث بالعلاقة:

$$F_{max} = \mu\, N \qquad (1)$$

حيث يمثِّل الحرف اليوناني μ معامل الاحتكاك الساكن ، والجدول الآتي يبين القيم التقريبية لهذا المعامل لبعض أنواع السطوح الجافة الواقعة في حالة احتكاك.

سطوح الاحتكاك	معامل الاحتكاك الساكن
مطّاط على إسمنت (Rubber on concrete)	0.60-0.90
معدن على معدن (Metal on metal)	0.15-0.60
معدن على جلد (Metal on leather)	0.30-0.60
معدن على خشب (Metal on wood)	0.20-0.60
خشب على خشب (Wood on wood)	0.25-0.50

كما تتحدد قوة الاحتكاك F_k التي تنشأ في حالة الحركة بالعلاقة :

$$F_k = \mu_k N \qquad (2)$$

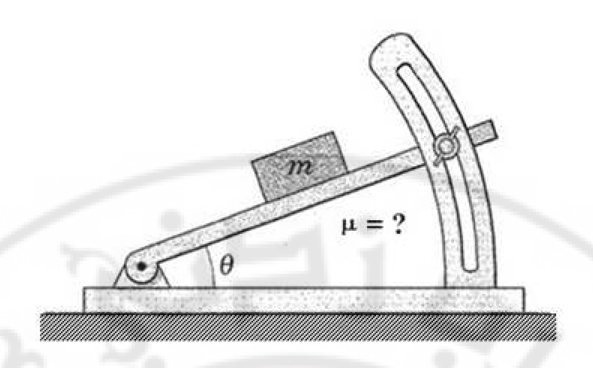
حيث يمثل μ_k معامل الاحتكاك الحركي وهو أدنى بقليل من معامل الاحتكاك الساكن.
وبصورة عامة تكون نسبته كما يلي : $\mu_k = (0.7 - 0.8)\ \mu$.

قوانين الاحتكاك : تتلخص قوانين الاحتكاك في النقاط الآتية :

1. عند تحريك جسم على سطح جسم آخر تنشأ قوة احتكاك في مستوي التماس بينهما ، وتكون جهتها بعكس جهة الحركة المحتملة .
2. تزداد قيمة قوة الاحتكاك من الصفر إلى قيمة أعظمية $\mathbf{F}_{max}$. وتصل هذه القوة إلى قيمتها الحدية العظمى عندما يوشك الجسمان أن ينزلقا على بعضهما، أي عندما تكون الحركة على وشك الحدوث.
3. تتناسب قوة الاحتكاك الحدية العظمى مباشرة مع رد الفعل الناظمي $\mathbf{N}$ الذي يؤثر به سطح على آخر. ويدعى ثابت التناسب ،كما سبق القول ، بعامل أو معامل الاحتكاك الساكن. أي أن: $F_{max} = \mu N$
4. إن قوة الاحتكاك تعتمد على مادة السطوح المتلامسة ودرجة خشونتها.
5. إن قوة الاحتكاك التي يمكن أن تنشأ بين جسمين لا تتعلق بأبعاد مساحة منطقة التماس.
6. إن قوة الاحتكاك التي يمكن أن تنشأ بين جسمين مستقلة عن سرعة الانزلاق في مجال السرعات المنخفضة نسبياً.
7. إن معامل الاحتكاك الحركي μ_k اقل من معامل الاحتكاك الساكن μ بنسبة مقدارها 0.20-0.30 تقريباً. ولهذا فإن قوة الاحتكاك $\mathbf{F}_k$ التي تتولد في أثناء حدوث الحركة تكون أصغر بقليل من قوة الاحتكاك الحدية $\mathbf{F}_{max}$ التي تتولد في حالة السكون.

تعيين معامل الاحتكاك تجريبياً :

تُعَدُّ طريقة المستوي المفصلي المائل القابل للتعيير من أكثر الطرق شيوعاً وهي موضحة في الشكل (3-5) . حيث يُصنع سطحا المستوي والجسم المنزلق من المواد المطلوب تعيين معامل الاحتكاك لها.



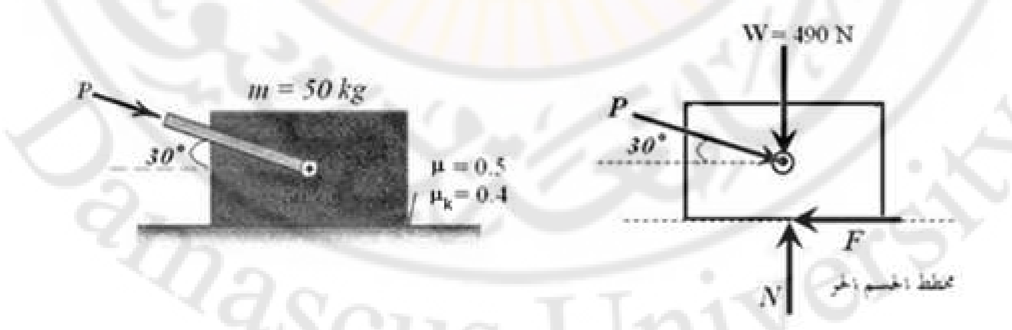
الشكل(3–5)

يوضع الجسم المفروض على المستوي المائل ثم نقوم برفع هذا المستوي وزيادة الزاوية θ تدريجياً. وبقياس أكبر زاوية θ_{max} يمكن أن يرفع إليها المستوي قبل أن يفقد الجسم توازنه وينزلق على المستوي ، نستطيع تعيين معامل الاحتكاك μ وذلك وفق العلاقة الآتية :

$$\mu = \tan \theta_{max} \qquad (3)$$

مثال رقم (33)

يبين الشكل صندوقاً كتلته 50 kg . يرتكز على سطح أفقي خشن ويخضع لتأثير القوة **P** .عيّن قوة الاحتكاك المماسية **F** بالإضافة إلى حالة الصندوق (سكون أم حركة) في الحالتين : a) P = 200 N b) P = 410 N



الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر للصندوق كما هو مبين في الشكل المفروض والذي يضم القوى الآتية: الوزن W ورد الفعل الناظمي N والقوة الخارجية P وقوة الاحتكاك F .

الحالة الأولى : P = 200 N

معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 200\cos 30° - F = 0 \Rightarrow F = 173\,N$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - 490 - 200\sin 30° = 0 \Rightarrow N = 590\,N$$

وتكون قوة الاحتكاك القصوى التي يمكن أن تنشأ بين سطحي التماس :

$$F_{max} = \mu_s N = 0.5(590) = 295\,N$$

نلاحظ أن : $F < F_{max}$ وهذا يشير إلى أن الصندوق في حالة سكون.

الحالة الثانية : P = 410 N

معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 410\cos 30° - F = 0 \Rightarrow F = 355\,N$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - 490 - 410\sin 30° = 0 \Rightarrow N = 695\,N$$

وتكون قوة الاحتكاك القصوى التي يمكن أن تنشأ بين سطحي التماس :

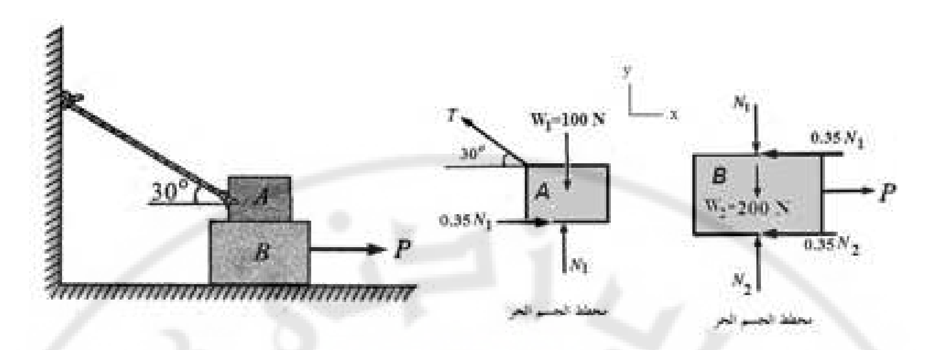
$$F_{max} = \mu_s N = 0.5(695) = 348\,N$$

نلاحظ أن : $F > F_{max}$ وهذا يشير إلى أن الصندوق في حالة حركة وتتحدد عندئذ قوة الاحتكاك الفعلية بالعلاقة:

$$F_k = \mu_k N = 0.4(695) = 278\,N$$

مثال رقم (34)

يرتكز الجسم A ذو الوزن 100 N على الجسم B ذي الوزن 200 N . كما يُربط الجسم A بجدار شاقولي بمساعدة حبل يميل بزاوية مقدارها 30° كما هو موضح في الشكل المرافق. أوجد القوة الأفقية **P** المطبقة على الجسم السفلي لجعله على وشك الانزلاق إلى اليمين. علما بأن معامل الاحتكاك الساكن لجميع السطوح المتلامسة هو $\mu=0.35$.



الحل : ....

يبين الشكل مخطط الجسم الحر لكل من الجسمين **A** و **B**.

معادلتا التوازن للجسم الأول A :

$$\Sigma \mathrm{F_x} = 0 \Rightarrow 0.35N_1 - T\cos 30° = 0$$
$$\Sigma \mathrm{F_y} = 0 \Rightarrow N_1 - 100 + T\sin 30° = 0$$

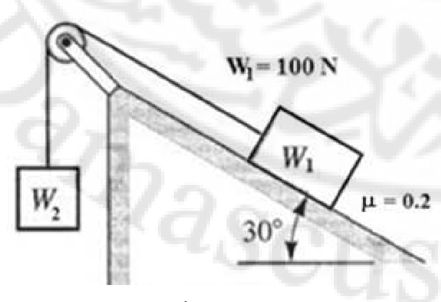
معادلتا التوازن للجسم الثاني B :

$$\Sigma \mathrm{F_x} = 0 \Rightarrow P - 0.35N_1 - 0.35N_2 = 0$$
$$\Sigma \mathrm{F_y} = 0 \Rightarrow N_2 - 200 - N_1 = 0$$

من المعادلات السابقة ينتج أن :

$$\mathrm{P} = 128\ \mathrm{N}$$

مثال رقم (35)

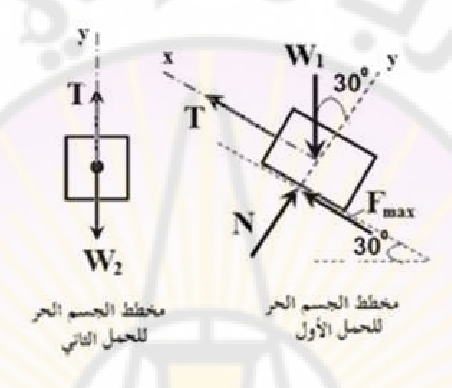


يستند حمل وزنه W_1=100 N إلى مستو مائل وقد رُبطَ به حبل يمر على بكرة ويحمل في نهايته الطليقة حملاً آخر وزنه W_2 . أوجد في وضع التوازن قيمة W_2 الضرورية لمنع الحمل الأول من الهبوط على المستوي المائل ، إذا كان معامل الاحتكاك بين الحمل الأول والمستوي المائل يساوي 0.2.

الحل : ....

يبين الشكل مخطط الجسم الحر لكل من الحملين $\mathbf{W}_1$ و $\mathbf{W}_2$. معادلتا التوازن للحمل الأول :

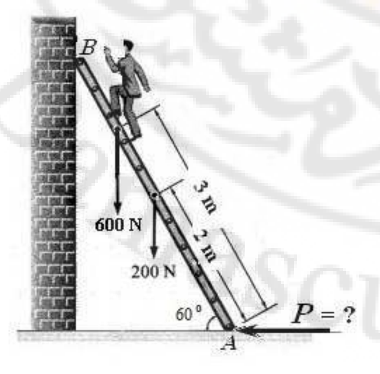
$$\Sigma\, F_y = 0 \;\Rightarrow\; N - 100\cos 30° = 0 \;\Rightarrow\; N = 86.6\, N$$
$$\Sigma\, F_x = 0 \;\Rightarrow\; T + \mu_S N - 100\sin 30° = 0 \;\Rightarrow\; T = 32.68\; N$$



معادلة التوازن للحمل الثاني :

$$\Sigma\, F_y = 0 \;\Rightarrow\; T - W_2 = 0$$
$$W_2 = \; 32.68\; N$$

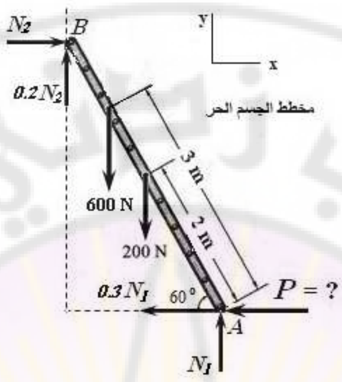
مثال رقم (36)



سلّم طوله 4 m ووزنه 200 N . يستند إلى حائط شاقولي ، ويرتكز بطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة كما هو واضح في الشكل. معامل احتكاك السلّم بالحائط يساوي 0.2 ، وبسطح الأرض يساوي 0.3 . ويبلغ وزن الشخص الذي يقف على السلّم 600 N. في الوضع المبين للسلّم والموافق لزاوية الميل 60° عيّن القوة **P** الضرورية لمنع السلّم من الانزلاق .

الحل : ....

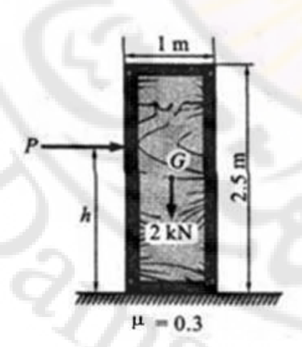
نرسم مخطط الجسم الحر للسلّم كما هو موضح في الشكل ثم نكتب معادلات التوازن:



$$\Sigma F_x = -P - 0.3\,N_1 + N_2 = 0$$
$$\Sigma F_y = N_1 + 0.2\,N_2 - 600 - 200 = 0$$
$$\Sigma M_A = 0$$
$$-N_2(4\sin 60°) - 0.2N_2(4\cos 60°) + 200(2\cos 60°) + 600(3\cos 60°) = 0$$

من المعادلات الثلاث السابقة نجد أن : P = 62 N .

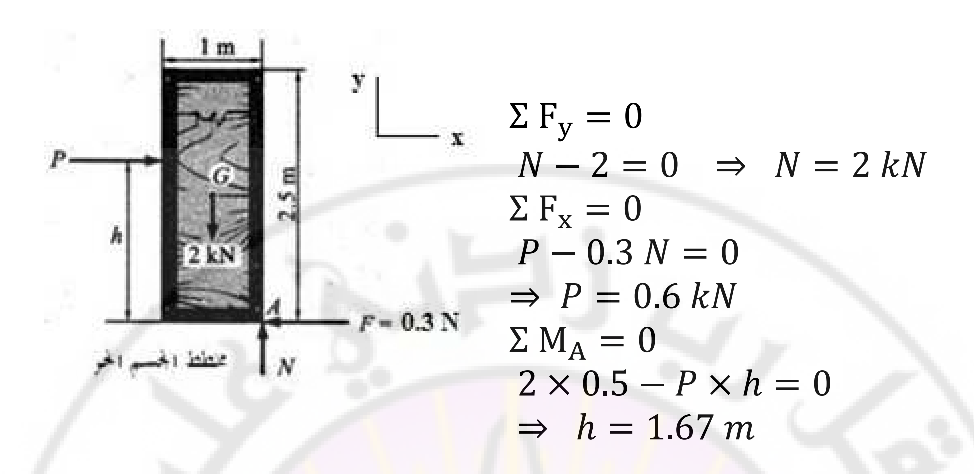
مثال رقم (37)



يستند جسم عرضه 1m وارتفاعه 2.5 m إلى سطح أفقي مستو كما هو مبين في الشكل. عيّن مقدار القوة الأفقية **P** التي تستطيع تحريك الجسم وكذلك ارتفاع حاملها h عن سطح الاستناد بحيث لا ينقلب الجسم.

الحل : ....

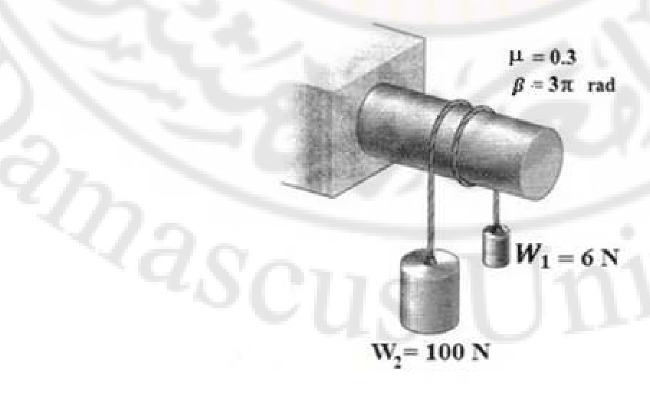
يبين الشكل مخطط الجسم الحر للجسم المفروض . نلاحظ في هذه الحالة الخاصة أن رد الفعل الناظمي **N** قد تحرك نحو الحافة الأمامية A وذلك لمنع الجسم من الانقلاب . معادلات التوازن هي :



$$\Sigma F_y = 0$$
$$N - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 2\ kN$$
$$\Sigma F_x = 0$$
$$P - 0.3\ N = 0$$
$$\Rightarrow\ P = 0.6\ kN$$
$$\Sigma M_A = 0$$
$$2 \times 0.5 - P \times h = 0$$
$$\Rightarrow \quad h = 1.67\ m$$

2-5 احتكاك الحبال والسيور (Belt and Rope Friction):

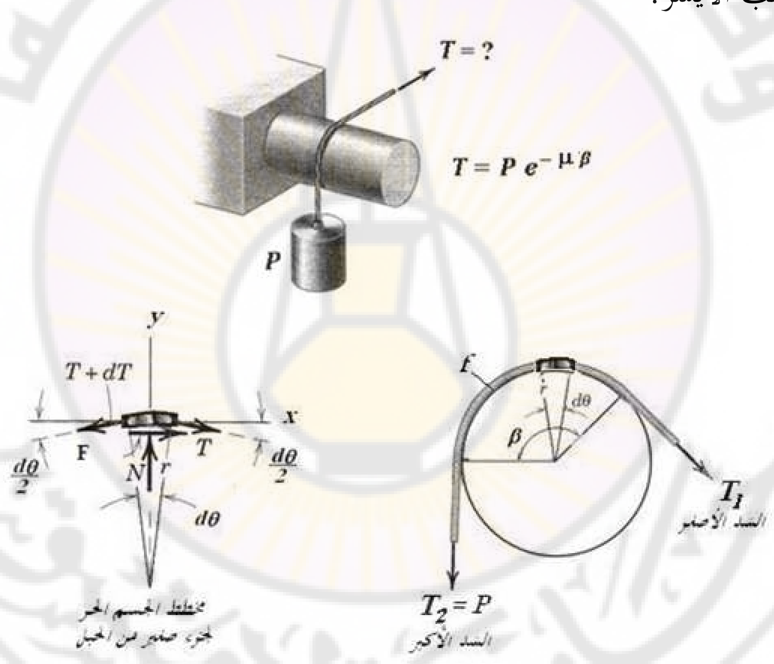
في الواقع العملي ، يمكن لحمل صغير وزنه W_1 أن يوازن حملاً كبيراً وزنه W_2 وذلك بلف الحبل عدة مرات حول عمود ثابت كما هو مبين في المثال الموضح في الشكل(5-4). لدراسة هذه المسألة واستنتاج العلاقة الرياضية التي تربط بين القوتين W_1 و W_2 نبسّط الموضوع بحيث نتصور حبلاً يلتف حول محيط اسطوانة خشنة ثابتة، ويؤثر في نهايته اليسرى حمل وزنه P ، وسوف نبحث عن أقل قوة شد T يجب أن تؤثر في نهاية الحبل الأخرى كي لا يسقط ، علماً بأن زاوية التماس β بين الحبل والاسطوانة معلومة ، وأن معامل الاحتكاك μ بين الحبل والاسطوانة معلوم أيضاً .



الشكل(5-4)

Damascus University

لاستنتاج العلاقة التي تربط بين القوتين T و P ندرس اتزان جزء صغير جداً من الحبل (انظر الشكل 5-5) في اللحظة التي يكون فيها الحبل على وشك الانزلاق على سطح الاسطوانة في اتجاه الحمل P . في هذه الحالة تؤثر في الجزء المدروس كما هو واضح من مخطط الجسم الحر أربع قوى وهي : رد الفعل الناظمي N ،وقوة الاحتكاك F التي تعاكس جهة انزلاق السير والتي تؤدي إلى زيادة قوة الشد المؤثرة في الجانب الأيسر بمقدار dT ، وقوة الشدّ T التي تؤثر في الجانب الأيمن ، وأخيرا قوة الشدّ (T+ dT) التي تؤثر في الجانب الأيسر.



الشكل(5-5)

نكتب معادلات التوازن بالنسبة لجملة المحاور المبينة في الشكل:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + T\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - (T + dT)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - T\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - (T + dT)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

وبما أن الزاوية $d\theta$ صغيرة جداً لذا يمكن أن نكتب :

$$cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 1 \quad ; \quad sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{d\theta}{2} \quad ; \quad dT\, sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

وبالتعويض نجد :

$$\mu N = dT \quad ; \quad N = Td\theta$$

ومنه ينتج :

$$dT = \mu T d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

وبإجراء التكامل مع مراعاة أن القوة T_1 تمثل الشدّ الأصغر وهي تؤثر بعكس جهة الانزلاق الوشيك للحبل بينما القوة T_2 تمثل الشدّ الأكبر وهي تؤثر بنفس جهة الانزلاق:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\beta} \mu d\theta$$

ومنه نجد :

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \mu\beta$$

ومن هذا ينتج أن :

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\beta} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1\, e^{\mu\beta} \qquad (4)$$

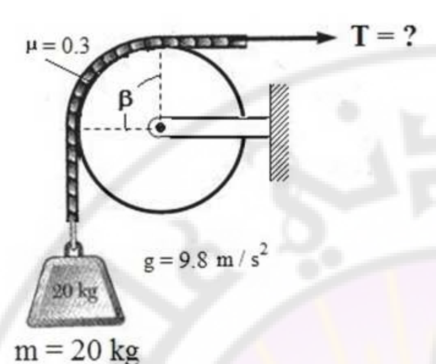
وبناء على ذلك تتعين قوة الشدّ المطلوبة بالعلاقة :

$$T = P\, e^{-\mu\beta} \qquad (5)$$

حيث $e = 2.718$ وهو يمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي . وتقدر زاوية التماس β بوحدة الراديان. وكما نرى من العلاقة الأخيرة أن مقدار القوة المطلوبة يتعلق بمعامل الاحتكاك وزاوية التماس فقط ولا علاقة لها بنصف قطر الاسطوانة. وعند انعدام الاحتكاك نحصل كما هو متوقع على المساواة $T=P$. ويمكن بزيادة زاوية التماس أن نقلل مقدار T اللازم لتوازن الحمل P . ولهذه الحقيقة أهمية كبيرة في الحياة العملية.

مثال رقم (38)

يُربط حمل كتلته $m = 20\ kg$ بكبل ملفوف ربع لفة حول بكرة ثابتة ، ويُحافظ على توازنه بتطبيق القوة **T** في النهاية الحرة لهذا الكبل كما هو موضح في الشكل . بفرض أن معامل الاحتكاك يساوي 0.3 . أوجد ما يلي :



1. قيمة القوة **T** الضرورية لمنع الحمل من السقوط.
2. قيمة القوة **T** اللازمة للبدء برفع الحمل .

الحل : ....

القوة الضرورية لمنع الحمل من السقوط : تتعين هذه القوة عندما يكون الحبل على وشك الانزلاق باتجاه الحمل . وبالعودة إلى العلاقة الآتية :

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\beta}$$

نلاحظ أن :

$$T_1 = T\ ,\ T_2 = mg = 20\times9.8=196\ N$$

وبالتعويض نجد أن :

$$T = 196\ e^{-0.3(0.5\pi)} = 122\ N$$

القوة اللازمة للبدء برفع الحمل: تتعين هذه القوة عندما يكون الحبل على وشك الانزلاق باتجاه الأعلى . وبالعودة إلى نفس العلاقة السابقة مع مراعاة الآتي :

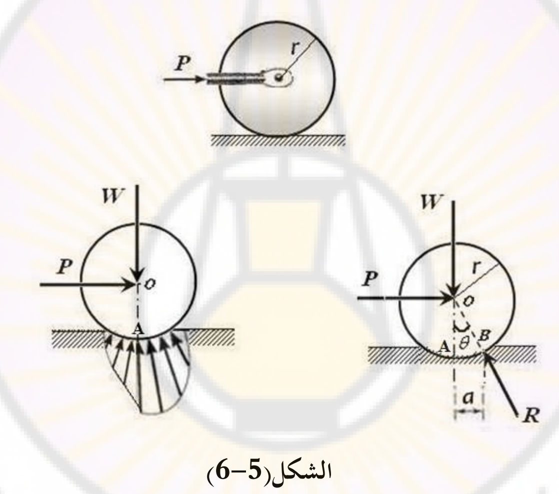
$$T_1 = 196\ N\ ,\ T_2 = T$$

وبالتعويض ينتج :

$$T = 196\ e^{0.3(0.5\pi)} = 314\ N$$

5–3 الاحتكاك التدحرجي (Rolling Friction):

تعدّ العجلة من الاكتشافات العظيمة في حياة البشر ، إذ إنها تساعد في نقل الحمولات الكبيرة بأقل جهد ممكن. وتدعى المقاومة التي تنشأ نتيجة لتدحرج جسم على سطح جسم آخر باحتكاك التدحرج. نفرض أن عجلة جسمها صلب ونصف قطرها r ووزنها W ، موضوعة على سطح أفقي غير قاسٍ كما هو مبين في الشكل(5–6). نلاحظ هنا أن تلامس العجلة مع سطح الاستناد يحدث في واقع الأمر على امتداد منخفض صغير نتيجة لتشوه سطح الاستناد ، وهذا ما أكدته التجارب .



الشكل(5–6)

إذا أثّرنا الآن في مركز العجلة بقوة أفقية **P** من أجل جرّ العجلة خارج المنخفض ، فإن شدة قوى الضغط الذي تتعرض له العجلة في منطقة التماس تكون أكبر في المقدمة مقارنة بالضغط في الجزء الخلفي من المنخفض. ونتيجة لذلك يؤثر رد الفعل **R** (محصلة قوى الضغط) في النقطة B التي تبعد مسافة مقدارها a عن نقطة التماس A . وبما أن خطوط تأثير القوى الثلاث **(P,W,R)** التي تخضع لها العجلة عندما تتدحرج بانتظام يجب أن تتقاطع في نقطة واحدة وهي مركز العجلة فإن ذلك يستدعي أن تميل القوة R بزاوية مقدارها θ بالنسبة للشاقول المار من مركز العجلة. ولتعيين القوة P اللازمة لتدحرج العجلة نكتب معادلة العزوم بالنسبة للنقطة B :

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow \quad P\,(r\,cos\theta) - W\,a = 0$$

$$P = \frac{a}{r\,cos\theta} W \qquad (6)$$

ونظرا لأن θ صغيرة فإن $\cos\theta = 1$ ويكون :

$$P \approx \frac{a}{r}\,W \qquad (7)$$

تسمى المسافة a بمعامل مقاومة التدحرج وهو يقدر بالمليمترات ، ويعتمد مقداره على مادة الجسم كما أنه يتحدد تجريبياً. على سبيل المثال ، يبلغ معامل مقاومة التدحرج لعجلة مطاطية مملوءة بالهواء المضغوط تتدحرج على طريق عام 0.75 mm - 0.50.

مثال رقم (39)

عجلة فولاذية نصف قطرها r =100 mm ووزنها W =100 N وضعت على سطح خشبي خشن يميل بزاوية مقدارها $5°$ كما هو موضح في الشكل . أوجد القوة **P** اللازمة لتدحرج العجلة بحركة منتظمة باتجاه الأعلى ، علماً بأن معامل احتكاك التدحرج يساوي 8.75mm .



الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل ثم نكتب معادلة العزوم الآتية:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-P\,(r) + W\cos 5°\,(a) + W\sin 5°\,(r) = 0$$

$$P = 100\left[\cos 5°\left(\frac{8.75}{100}\right) + \sin 5°\right] = 17.4\ \text{N}$$

مسائل غير محلولة

UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

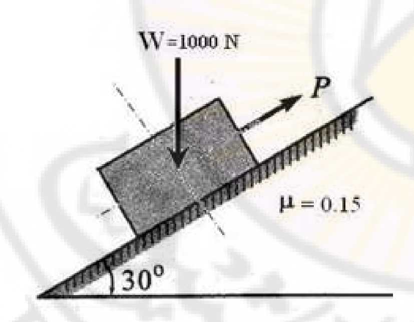
صندوق كتلته 90 kg ، يرتكز على سطح أفقي خشن ، ومُعاملا الاحتكاك الساكن والحركي يساويان $\mu_k=0.4$, $\mu=0.5$

وتؤثر في الصندوق القوة الأفقية P.

أوجد قوة الاحتكاك المماسية **F** التي تنشأ بين سطحي التماس ، مبيناً هل سيحافظ الصندوق على توازنه وذلك في الحالتين : a) P= 400 N b) P= 500N

الجواب : a) F = 400 N ; b) F = 353 N

مسألة رقم (2) :

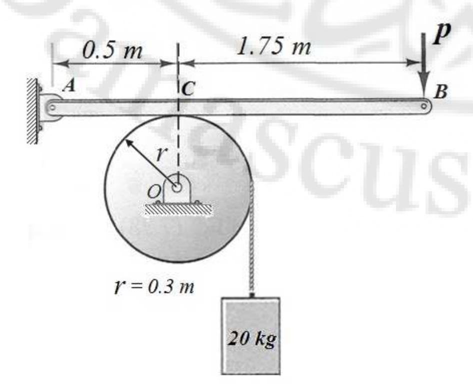


أوجد القيمتين الدنيا والقصوى للقوة **P** التي تجعل الثقل المبين في الشكل المجاور يحافظ على توازنه.

بفرض أن معامل الاحتكاك يساوي0.15 .

الجواب : P_{min} = 370 N , P_{max} = 630 N

مسألة رقم (3) :



تأمل الشكل المجاور ثم أوجد القيمة الدنيا للقوة P الضرورية لمنع سقوط حمل كتلته 20kg. بفرض أن معامل الاحتكاك بين الذراع AB والبكرة يساوي 0.25 .

الجواب : P = 224 N

مسألة رقم (4) :

يستند السلّم AB إلى حائط شاقولي أملس($\mu=0$) ، ويرتكز بطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة ($\mu=0.35$). ويؤثر وزن الشخص **W** الذي يقف على السلّم في النقطة C كما هو واضح في الشكل المجاور. في الوضع المبين للسلّم والموافق لزاوية الميل 60° عيّن قوة الاحتكاك التي تنشأ بين السلم وسطح الأرض، وهل سينزلق السلم أم سيبقى في حالة سكون .

الجواب : $F = 151$ N ، السلّم سيبقى في حالة سكون.

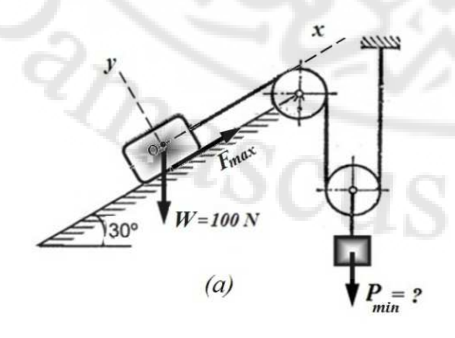
مسألة رقم (5) :

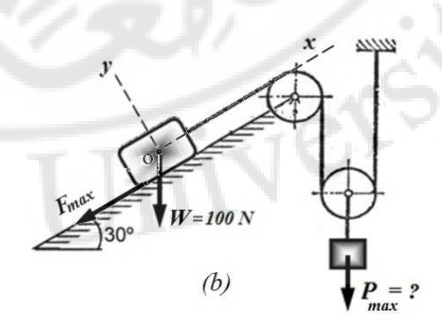
تأمّل الشكل المرافق .إذا كان أن معامل الاحتكاك بين الثقل **W** وسطح المستوي المائل يساوي 0.2 ، فأوجد في وضع التوازن ما يلي :

a) القيمة الدنيا للحمل **P** الضرورية لمنع الثقل من الانزلاق نحو الأسفل .

b) القيمة القصوى للحمل **P** الضرورية لمنع الثقل من الانزلاق نحو الأعلى .

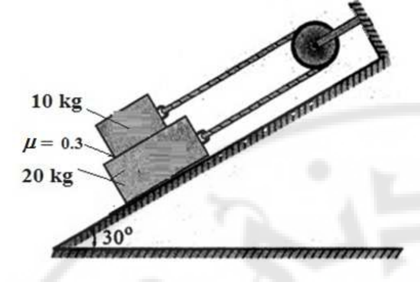
الجواب : $P_{max} = 134.6$ N $\quad P_{min} = 65.4$ N





Damascus University

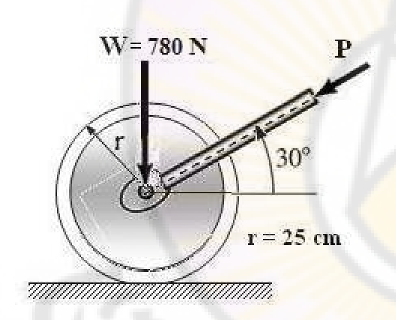
مسألة رقم (6) :



يستند ثقل كتلته m_1=20 kg إلى سطح مائل أملس ويحمل فوقه ثقل آخر كتلته m_2=10 kg ويُربط الجسمان معاً بمساعدة حبل ملفوف على بكرة ثابتة كما هو مبين في الشكل المجاور. احسب قوة شد الحبل **T** وكذلك قوة الاحتكاك **F** التي تتولد بين الجسمين بفرض أن معامل الاحتكاك بينهما μ=0.3 وأن الاحتكاك مع سطح الاستناد مهمل.

الجواب : F = 24.5 N , T = 73.5 N

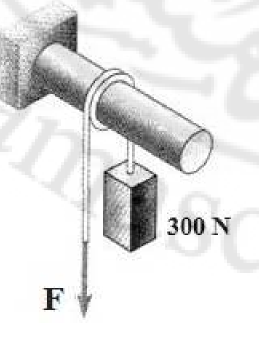
مسألة رقم (7) :



ما هي القوة P التي تطبق على امتداد الذراع الموصول بمركز العجلة بما يؤدي إلى تدحرج العجلة بحركة منتظمة كما هو موضح في الشكل المجاور . علماً بأن وزن العجلة يساوي 780N وأن نصف قطرها r =25cm ، وأن معامل احتكاك التدحرج a =2.5cm .

الجواب : P = 95.6 N

مسألة رقم (8) :



يبين الشكل المجاور حملاً وزنه W =300 N رُبِطَ بحبل ملفوف بمقدار لفة ونصف (β=3π) حول عمود ثابت، ويُحافظ على توازنه بمساعدة القوة **F** . بفرض أن معامل الاحتكاك يساوي 0.15 . أوجد قيمة القوة **F** الضرورية لمنع الحمل من السقوط.

الجواب : F = 73 N

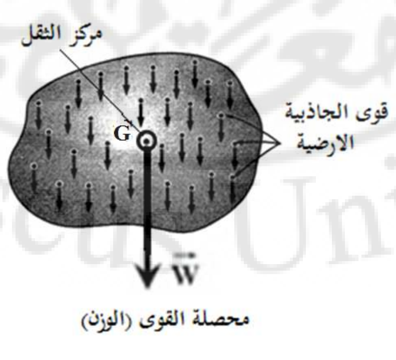
الفصل السادس

مــراكز الثّــقــل

CENTERS OF GRAVITY

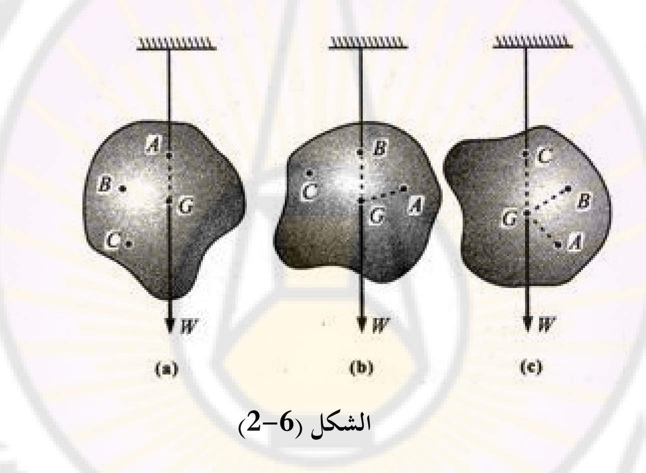
6–1 إحداثيات مركز ثقل الجسم (Coordinates of Centre of Gravity) :

تحديد مركز الثقل تجريبياً : تؤثر في الجزيئات المختلفة التي يتكون منها أي جسم صلب يقع على سطح الأرض أو قريباً منها قوى متجهة رأسياً نحو الأسفل باتجاه مركز الأرض، تسمى قوى الجاذبية الأرضية وذلك كما هو مبين في الشكل(6–1). ويمكن اعتبار قوى الجاذبية الأرضية قوى متوازية كما نرمز لمحصلتها بالرمز **W** ويسمى مقدار هذه المحصلة وزن الجسم (Weight of the Body) كما تدعى النقطة التي تمر منها محصلة قوى الجاذبية بمركز ثقل الجسم ، ويرمز له بالحرف **G** .



الشكل (6–1)

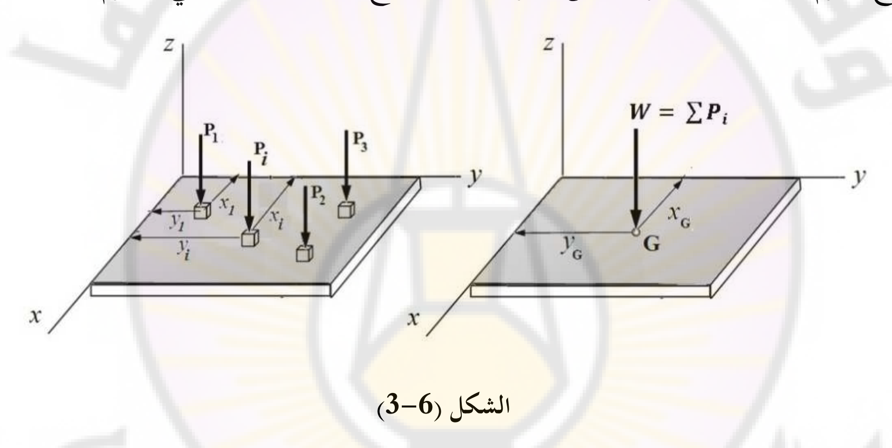
المثال الآتي يوضح مفهوم مركز الثقل وكيفية تعيينه تجريبياً : نأخذ جسماً ونُثبِّت على سطحه ثلاثة مسامير في النقاط A وB وC كما هو موضح في الشكل(6-2) ، ثم نقوم بالخطوات الثلاث الآتية : في الخطوة الأولى نعلق الجسم في النقطة A ثم نرسم خطاً (متقطعاً مثلاً) شاقولياً يمثل حامل قوة الوزن ، وفي الخطوة الثانية نعلق الجسم في النقطة B ثم نرسم خطاً شاقولياً يمثل حامل قوة الوزن ، وفي الخطوة الثالثة نعلق الجسم في النقطة C ثم نرسم خطاً شاقولياً يمثل حامل قوة وزن الجسم . نلاحظ أن الخطوط المرسومة تلتقي في نقطة واحدة تمثل في واقع الأمر مركز ثقل الجسم.



الشكل (6-2)

خلاصة القول ، إن مركز ثقل جسم ما هو النقطة التي تمر منها محصلة قوى الوزن الموزعة والعائدة لجميع جزيئات هذا الجسم. ومن المعروف أن الأجسام في الطبيعة كلها ثلاثية البعد ، ولذا فإن قوى الوزن المؤثرة في الجزيئات المختلفة للجسم تمثل جملة من القوى المتوازية الفراغية. إلا أن هنالك بعض الحالات التي تبرر إهمال بُعد أو بُعدين للجسم المدروس ، وافتراض أن الجزيئات التي يتركب منها محدودة بمستو واحد أو بخط فقط. يقتصر هذا الفصل على هذه الحالات الخاصة والتي تشمل مساحات السطوح المستوية والخطوط .حيث يدخل في عداد هذه الخطوط : الأسلاك والقضبان والأطر(Frames) بأشكالها الهندسية المختلفة .

تعيين إحداثيات مركز الثقل : إذا افترضنا أن الجسم الصلب هو عبارة عن صفيحة مستوية ورقيقة كما هو مبين في الشكل (3-6) فإنه يمكن بسهولة تعيين إحداثيات مركز ثقله G بتطبيق قاعدة العزوم الواردة في الفصل الأول ، والتي تقول : إن عزم القوة حول محور ما يساوي مجموع عزوم مركباتها حول نفس المحور . فإذا نظرنا إلى الجسم على أنه جملة كبيرة من الجزيئات عددها n وافترضنا أن وزن أية جزيئة i من جزيئات هذا الجسم يساوي P_i عندئذ يكون وزن الجسم كله : $W=\sum P_i$. وبما أن عزم القوة W يساوي مجموع عزوم مركباتها P_i حول نفس المحور،لذا نستطيع أن نكتب معادلتي العزوم الآتيتين :



الشكل (3-6)

$$\sum M_y: \; W \times x_G = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots + P_n x_n = \sum_{i=1}^{n} (P_i \, x_i)$$

$$\sum M_x: \; W \times y_G = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots + P_n y_n = \sum_{i=1}^{n} (P_i \, y_i)$$

ومن هنا نجد أن إحداثيات مركز الثقل العام لأي جسم صلب هي :

$$x_G = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i} \qquad (1)$$

حالات خاصة :

- إذا وقع الجسم في مجال الجاذبية الأرضية المتجانس (g=constant) عندئذ نلاحظ أن: $P_i=m_i g$ ، وتصبح إحداثيات مركز الثقل العام :

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad (2)$$

حيث m_i هي كتلة الجزيئة الواحدة ، والرمز $\sum m_i$ يشير إلى كتلة الجسم كله . وتسمى النقطة التي تتعين إحداثياتها بهاتين العلاقتين بمركز العطالة أو مركز كتلة الجسم (center of mass).ولهذا المفهوم أهمية كبيرة في علم التحريك كما سنرى في الباب الثالث من هذا الكتاب.

- إذا وقع الجسم في مجال الجاذبية الأرضية المتجانس (g=constant) وكان من ناحية أخرى هذا الجسم متجانسا (ρ=constant)، عندئذ تتحدد الكتلة كما يلي :

$m = \rho V$ بالنسبة للحجوم

$m = \rho A$ بالنسبة للسطوح

$m = \rho L$ بالنسبة للاطوال

حيث ρ هي كثافة الجسم ، والرمز V يشير إلى الحجم ، ويشير الرمز A إلى المساحة ، بينما يشير الرمز L إلى الطول . وبالتعويض في معادلتي مركز الثقل فإننا نحصل بالنسبة للسطوح والأطوال المتجانسة على العلاقات الآتية :

$$x = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} \qquad (3)$$

$$x = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum L_i y_i}{\sum L_i} \qquad (4)$$

وكما نرى يتوقف موضع مركز الثقل $G(x,y)$ للجسم المتجانس على شكله الهندسي فقط، ولهذا السبب تسمى النقطة G التي تتعين إحداثياتها بهذه العلاقات بالمركز المتوسط الهندسي Centroid .

6–2 مراكز الأشكال الهندسية البسيطة (Centroids of Geometrical Shapes) :

يوضح كل من الشكلين (6–4)و(6–5) مراكز ثقل الأشكال الهندسية البسيطة الآتية والتي تشمل بصورة أساسية المستطيل والمثلث والقطاع الدائري :

- المستطيل : إن مركز ثقل المستطيل يقع في نقطة تلاقي قطريه.
- المثلث : إن مركز ثقل المثلث يقع في نقطة تلاقي متوسطاته.
- القطاع الدائري : إن مركز ثقل القطاع الدائري يقع على محور تناظره ويبعد عن مركز دائرته بالمقدار المبين في الشكل. حيث تمثل α نصف الزاوية المركزية للقطاع .

احداثيات مركز الثقل		المساحة Area	الشكل الهندسي للسطح Geometrical Shapes
Y_i	X_i		
$\frac{b}{2}$	$\frac{a}{2}$	ab	1 - مستطيل Rectangle
$\frac{h}{3}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{bh}{2}$	2 - مثلث قائم الزاوية Right Angled Triangle
$\frac{h}{3}$	0	$\frac{bh}{2}$	3 - مثلث متساوي الساقين أو الأضلاع Isosceles/Equillateral Triangle
0	$\frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$ حيث : α بوحدة الراديان	αr^2 حيث : α بوحدة الراديان	4 - قطاع دائري Circular Sector
$\frac{4r}{3\pi}$	0	$\frac{\pi r^2}{2}$	5 - نصف دائرة Semicircle
$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$	6 - ربع دائرة Quarter Circle

الشكل (6–4)

Damascus University

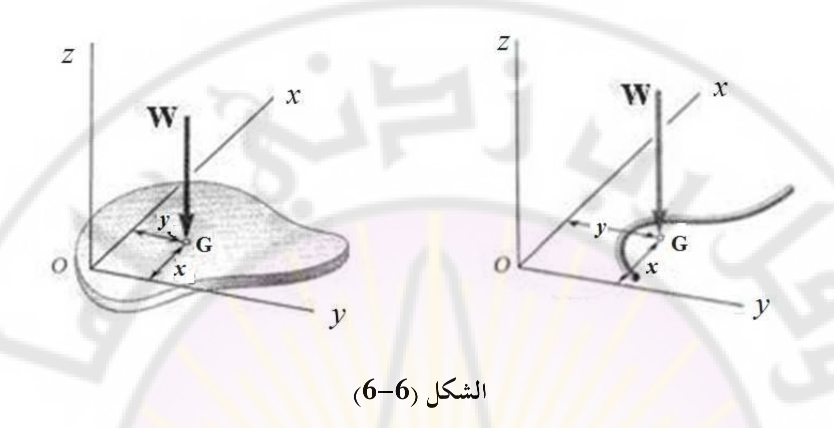
احداثيات مركز الثقل		الطول	الشكل الهندسي للاطار
Y_i	X_i	Length	Geometrical Shapes
0	$\frac{l}{2}$	l	1 - مستقيم Straight Line
0	$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ حيث : α بوحدة الراديان	$2\alpha r$ حيث : α بوحدة الراديان	2 - قوس دائري Arc of Circle
$\frac{2r}{\pi}$	0	πr	3 - قوس شكله نصف دائرة Semicircular Arc
$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$	4 - قوس شكله ربع دائرة Quarter Circular Arc

الشكل (6–5)

6–3 مراكز مساحات السطوح والأطوال (Centroids of Areas and Lines) :

تتناول هذه الفقرة كيفية تعيين موضع مركز الثقل G للمساحات (Areas) والأطوال (Lines) كما هو مبين في الشكل(6–6). وعلى وجه العموم ، يحتاج البحث عن إحداثيات مركز الثقل لسطح أو إطار ما إلى إجراء عملية تقسيم للسطح أو الإطار إلى عدة أشكال هندسية بسيطة بحيث تكون مراكز ثقلها معلومة. ففي حالة السطوح

المتجانسة ، يُقسّم السطح المفروض إلى عدة سطوح بسيطة الشكل ويُرمز لمساحاتها A_i وإحداثيات مركز ثقلها x_i و y_i.



الشكل (6–6)

عندئذ يمكن تعيين إحداثيات مركز الثقل العام $G(x , y)$ للسطح المفروض باستعمال العلاقتين الآتيتين :

$$x = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n}{A_1 + A_1 + \cdots + A_n} \qquad (5)$$

$$y = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n}{A_1 + A_1 + \cdots + A_n} \qquad (6)$$

أما في حالة الأطوال كالأطر (Frames) مثلاً ، يُقسّم الإطار المفروض إلى عدة عناصر بسيطة الشكل ويُرمز لأطوالها L_i وإحداثيات مركز ثقلها x_i و y_i. وبما أن مقدار قوة الوزن w_i لأي عنصر من العناصر متناسب مع طول هذا العنصر(Li) لذا يمكن تعيين موضع مركز الثقل العام للإطار كما يلي:

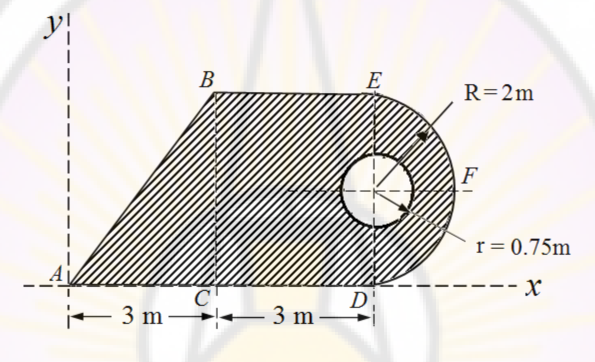
$$x = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i} = \frac{L_1 x_1 + L_2 x_2 + \cdots + L_n x_n}{L_1 + L_1 + \cdots + L_n} \qquad (7)$$

$$y = \frac{\sum L_i y_i}{\sum L_i} = \frac{L_1 y_1 + L_2 y_2 + \cdots + L_n y_n}{L_1 + L_1 + \cdots + L_n} \qquad (8)$$

يوضح كل من المثالين الآتيين كيفية استخدام المعادلات الرياضية السابقة في حساب إحداثيات موضع مركز الثقل وذلك في حالتي السطوح والأطر المستوية .

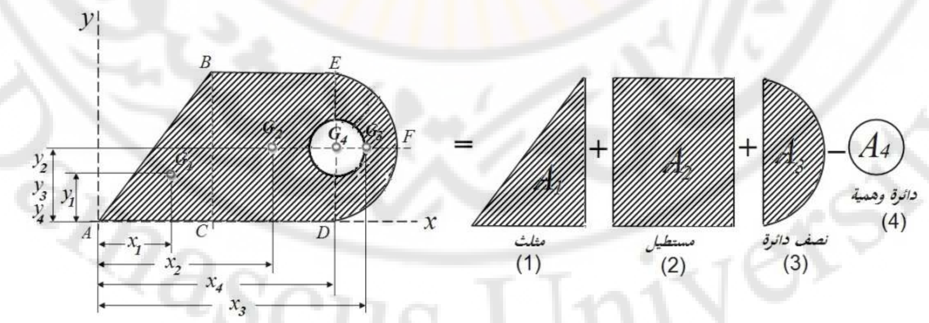
مثال رقم (40)

احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x , y) للصفيحة المتجانسة الموضحة في الشكل وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .



الحل : ....

نُقسّم السطح المعطى إلى أربعة أجزاء ثم نحسب مساحة كل جزء وإحداثيات مركز ثقله بمساعدة الشكل الآتي :



$$A_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6\ m^2$$

$$A_2 = 3 \times 4 = 12\ m^2$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 6.28\ m^2$$
$$A_4 = -\pi \times 0.75^2 = -1.77\ m^2$$

ثم نحدد إحداثيات مراكز الثقل لجميع الأجزاء المكونة للصفيحة المستوية كما هو مبين في الشكل السابق ونضعها في جدول كالآتي :

الأجزاء	المساحة A_i (m^2)	x_i (m)	y_i (m)
المثلث ABC	6	2	1.33
المستطيل $BCDE$	12	4.5	2
نصف الدائرة DEF	6.28	6.85	2
الدائرة الوهمية	− 1.77	6	2

يتعين مركز الثقل العام لأي سطح مستو بالمعادلتين الآتيتين :

$$x = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

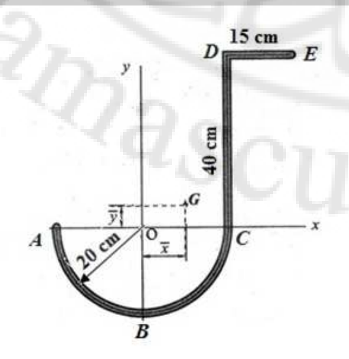
نعوض فنحصل على :

$$x = \frac{6 \times 2 + 12 \times 4.5 + 6.28 \times 2 - 1.77 \times 2}{6 + 12 + 6.28 - 1.77} = 4.37\ m$$

$$y = \frac{6 \times 1.33 + 12 \times 2 + 6.28 \times 6.85 - 1.77 \times 6}{6 + 12 + 6.28 - 1.77} = 1.82\ m$$

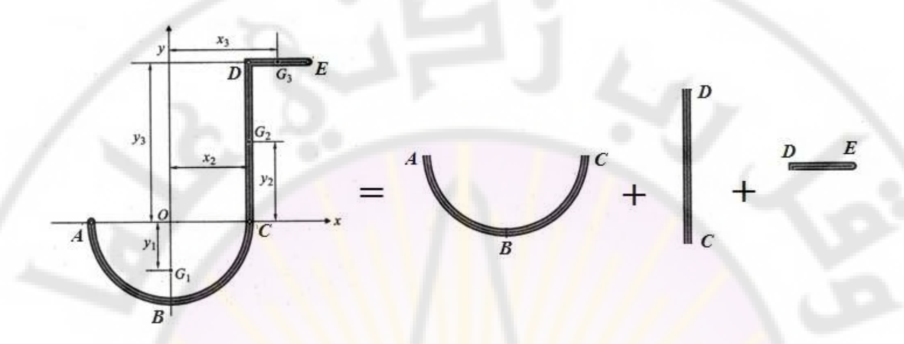
مثال رقم (41)

احسب إحداثيات مركز الثقل العام C(x , y) للإطار (Frame) الموضح في الشكل وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .



الحل : ....

نُقسّم الإطار المفروض إلى ثلاثة أجزاء ثم نحسب طول كل جزء وإحداثيات مركز ثقله . كما هو مبين في الجدول.



y_i (cm)	x_i (cm)	الطول L_i (cm)	الأجزاء
−12.73	0	20 π	القوس *ABC*
20	20	40	القطعة المستقيمة *CD*
40	27.5	15	القطعة المستقيمة *DE*

يتعين مركز الثقل العام لأي إطار (Frame) بالمعادلتين الآتيتين :

$$x = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum L_i y_i}{\sum L_i}$$

وباستخدام القيم الواردة في الجدول السابق نحصل على :

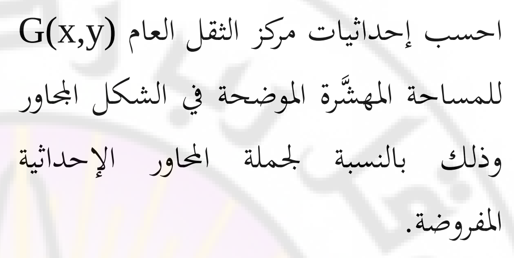
$$x = \frac{(20\pi \times 0) + (40 \times 20) + (15 \times 27.5)}{20\pi + 40 + 15} = 10.29\ cm$$

$$y = \frac{(-12.73 \times 20\pi) + (40 \times 20) + (15 \times 40)}{20\pi + 40 + 15} = 5.09\ cm$$

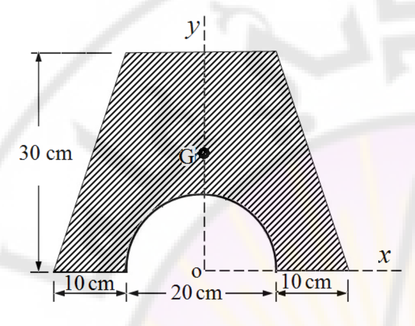
مسائل غير محلولة
UNSOLVED PROBLEMS



مسألة رقم (1) :



احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للمساحة المهشَّرة الموضحة في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.

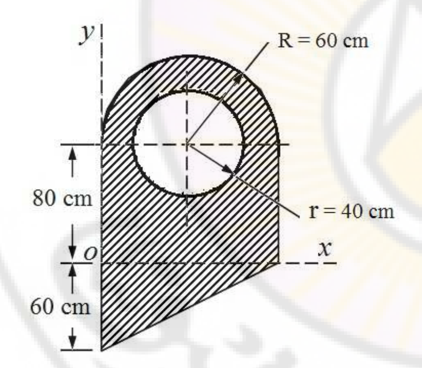


الجواب :

x = 0 , y = 15.26 cm

مسألة رقم (2) :

احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للمساحة المهشَّرة الموضحة في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .

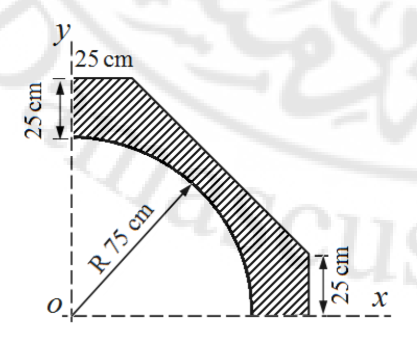


الجواب :

x = 54.8 cm , y = 36.62 cm

مسألة رقم (3) :

احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للمساحة المهشَّرة الموضحة في الشكل وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .

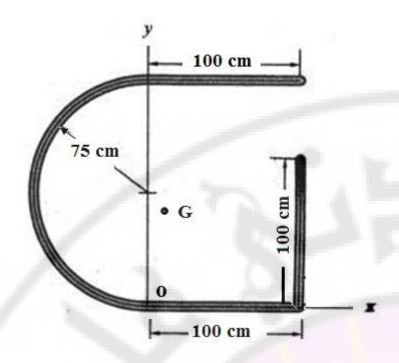


الجواب :

x = y = 53.6 cm

مسألة رقم (4) :

احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للإطار الموضح في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.

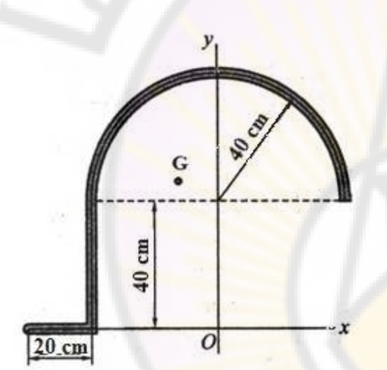


الجواب :

x = 16.4 cm , y = 70.3 cm

مسألة رقم (5) :

احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للإطار الموضح في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.

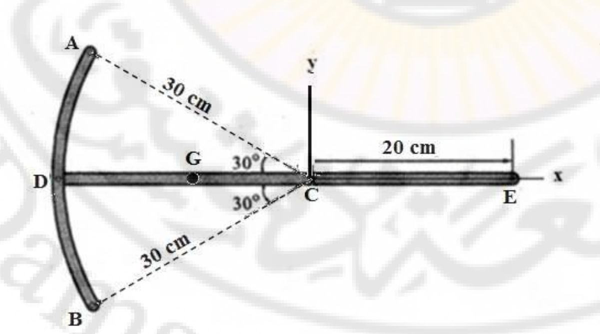


الجواب :

x = -14 cm , y = 48.6 cm

مسألة رقم (6) :

احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للإطار الموضح في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.



الجواب :

x = -14.13 cm , y =0

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

الباب الثاني

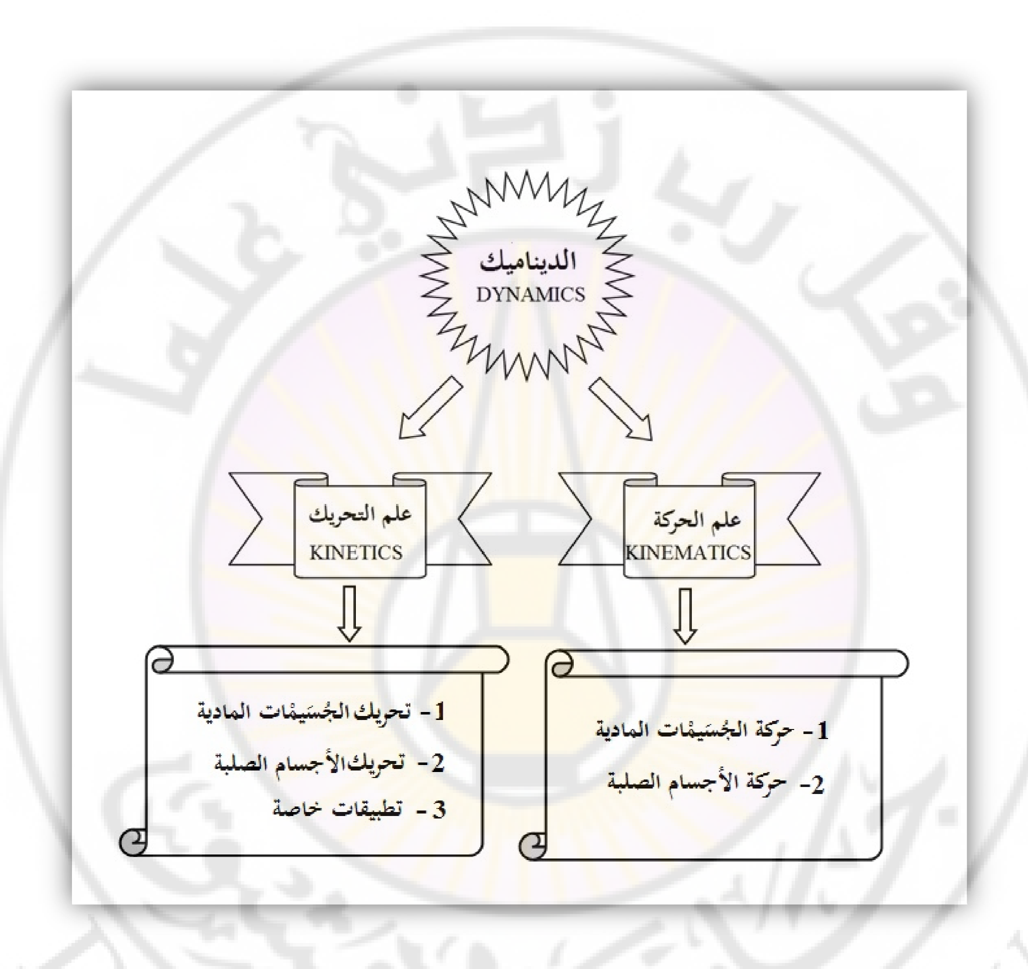
علم الحركة

KINEMATICS

يتضمن هذا القسم :

- **الفصل السابع** : حركة الجُسَيْمات المادية .
- **CHAPTER 7** : Kinematics of Particles
- **الفصل الثامن** : حركة الأجسام الصلبة .
- **CHAPTER 8** : Kinematics of Rigid Bodies

Damascus University



Damascus University

الفصل السابع

حركة الجُسَيْمات المادية

KINEMATICS OF PARTICLES

إن علم الحركة المجردة (Kinematics) هو ذلك الفرع من الميكانيك الهندسي الذي يدرس حركة الأجسام دون الرجوع إلى القوى المسببة للحركة أو الناتجة عنها. ويشكل استيعاب هذا الفرع الأساس اللازم لدراسة علم التحريك (Kinetics) الذي يربط بين مواصفات الحركة والقوى المصاحبة لها .

7-1 المعادلات التفاضلية للحركة المستقيمة (Eq. of Rectilinear Motion) :

إذا تحرك جسيم على امتداد مسار مستقيم فإن حركته تسمى بالحركة الخطية المستقيمة. وتنحصر دراسة هذه الحركة في تعيين الخصائص الآتية : الموضع والسرعة والتسارع .

الموضع (Position): بفرض أن النقطة P تتحرك في مسار مستقيم كما هو مبين في الشكل(7-1). نختار على هذا المسار نقطة ملائمة O ونعتبرها مبدأ القياس ، ثم نعتبر المسار محوراً للإحداثيات ونحدد عليه الاتجاهين الموجب والسالب. وبناء على ذلك يتعين

موضع النقطة P بالإحداثية S المساوية لبعد مبدأ الإحداثيات o عن تلك النقطة مأخوذاً بالإشارة المناظرة. وعند الحركة تتغير المسافة S بمرور الزمن t وفق العلاقة :

$$S = f(t)$$

الشكل (7–1)

السرعة (Velocity): إذا تحركت النقطة P خلال الفترة الزمنية Δt من موضع إلى آخر فإن المسافة المقطوعة Δs تدعى بالإزاحة كما هو مبين في الشكل. إن السرعة المتوسطة (Average Velocity) v_{av} للنقطة P هي الإزاحة Δs مقسّمة على الفترة الزمنية Δt. وإذا حسبنا النهاية التي تسعى إليها السرعة المتوسطة عندما نجعل المجال الزمني Δt يتناقص شيئاً فشيئاً بحيث يقترب من الصفر ، حصلنا على السرعة اللحظية (Instantaneous Velocity) كما يلي:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad (1)$$

وهكذا ، فإن السرعة في أية لحظة من الحركة تساوي مشتق إحداثية الموضع بالنسبة للزمن. ويتجه شعاع السرعة كما هو موضح في الشكل على امتداد الخط المستقيم الذي يتحرك فيه الجسيم.وتكون السرعة موجبة أو سالبة تبعاً لإشارة الإزاحة.

التسارع (Acceleration): إن التسارع الوسطي (Average Acceleration) a_{av} للنقطة P هو تغير السرعة Δv مقسوماً على الفترة الزمنية Δt . وإذا حسبنا النهاية التي يسعى إليها التسارع الوسطي عندما نجعل المجال الزمني Δt يتناقص شيئاً فشيئاً بحيث يقترب من الصفر ، حصلنا على التسارع اللحظي (Instantaneous Acceleration) كما يلي:

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (2)$$

وهكذا ، فإن التسارع في أية لحظة من الحركة يساوي مشتق السرعة بالنسبة للزمن. ومن الواضح أن شعاع التسارع $\boldsymbol{a}$ كما هو موضح في الشكل يتجه على امتداد الخط المستقيم الذي يتحرك فيه الجسيم. وتتعلق إشارة التسارع الموجبة أو السالبة بازدياد السرعة أو نقصانها خلال الحركة.

إذا حسبنا الزمن dt من المعادلتين السابقتين ، فإننا نحصل من العلاقتين الناتجتين على معادلة تفاضلية تربط بين الموضع والسرعة والتسارع كالآتي :

$$vdv = ads \qquad (3)$$

إن العلاقات 1 و 2 و 3 هي المعادلات التفاضلية العامة للحركة الخطية المستقيمة. وتُحل مسائل الحركة المستقيمة عادة بتكامل هذه المعادلات.

الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام : هي حركة الجسيم بتسارع ثابت ($\boldsymbol{a}$=constant) . وعندما يكون التسارع ثابتاً يصبح بالإمكان إجراء التكامل للعلاقات التفاضلية السابقة . ونحصل عندئذ على صيغ رياضية تربط بين الزمن من جهة والموضع والسرعة والتسارع من جهة أخرى .

العلاقة بين السرعة والزمن : : إذا افترضنا أن قيمة السرعة v تساوي v_o في لحظة بدء الحركة الموافقة للزمن $t = 0$ ، عندئذ ينتج من تكامل العلاقة رقم (2) ما يلي :

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a\, dt$$

$$v = v_0 + at \qquad (4)$$

العلاقة بين الموضع والزمن : إذا افترضنا أن قيمة إحداثية الموضع s تساوي s_0 في لحظة بدء الحركة الموافقة للزمن $t = 0$ ، فإنه ينتج من تكامل العلاقة رقم (1) ما يلي :

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} v\, dt = \int_{0}^{t} (v_0 + at)\, dt$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\, at^2 \qquad (5)$$

العلاقة بين السرعة والموضع : إذا افترضنا أن قيمة السرعة v تساوي v_0 عندما تكون إحداثية الموضع s مساوية s_0 . فإنه ينتج من تكامل العلاقة رقم (3) الآتي :

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{s_0}^{s} a ds$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a(s - s_0) \qquad (6)$$

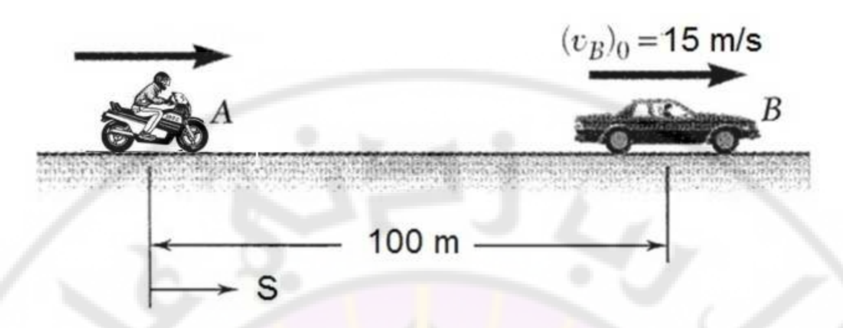
إن المعادلات 4 و 5 و 6 لا تطبق إلا في المسائل ذات الحركة المتغيرة بانتظام لأن تكامل المعادلات التفاضلية السابقة تمَّ على أساس التسارع الثابت .

مثال رقم (1)

تبدأ دراجة آلية A حركتها من السكون على طريق مستقيم خلف السيارة B بمسافة مقدارها 100 m كما يبين الشكل المرافق . بفرض أن الدراجة تتحرك على مسارها بتسارع ثابت مقداره $0.6\ m/s^2$ بينما تتحرك السيارة على مسارها بتباطؤ ثابت مقداره $0.4\ m/s^2$. إذا علمت أن سرعة السيارة الابتدائية موضحة في الشكل فاحسب :

1. الزمن الذي تحتاجه الدراجة الآلية كي تدرك السيارة .

2. موضع الدراجة الآلية والسيارة لحظة التقائهما .



الحل : ....

حركة الدراجة الآلية : يتعين موضع الدراجة التي تتحرك بتسارع ثابت من العلاقة :

$$s_A = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\ at^2$$
$$s_A = 0 + (0)t + \frac{1}{2}\ (0.6)t^2$$
$$s_A = 0.3\ t^2$$

حركة السيارة : يتعين موضع السيارة التي تتحرك بتباطؤ ثابت من العلاقة الآتية :

$$s_B = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\ at^2$$
$$s_B = 100 + (15)t - \frac{1}{2}\ (0.4)t^2$$
$$s_B = 100 + 15t -\ 0.2t^2$$

لحظة الالتقاء : يتساوى S_A و S_B لكل من الدراجة والسيارة لحظة تلاقيهما :

$$s_A = s_B$$
$$0.3\ t^2 = 100 + 15t -\ 0.2t^2$$
$$0.5\ t^2 - 15t - 100 = 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد الزمن التالي الذي تحتاجه الدراجة الآلية كي تدرك السيارة :

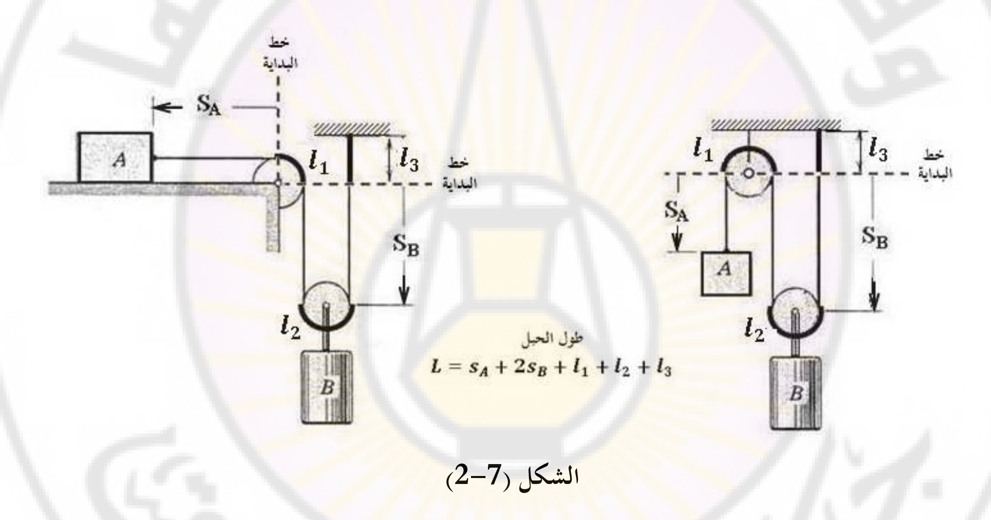
$$t = 35.6\ \ sec$$

ولتعيين نقطة الالتقاء نعوض الزمن الناتج بمعادلة الموضع S_A أو S_B فنحصل على :

$$s = s_A = s_B = 380\ m$$

2–7 الحركة المستقيمة لعدّة جسيمات (Motion of Several Particles) :

في بعض المسائل الهندسية يعتمد موضع جسم ما على موضع جسم آخر . يدعى هذا النوع من الحركات بالحركة المقيدة أو الحركة غير المستقلة . يبين الشكل(7–2) مثالين مختلفين لحركة كتلتين متصلتين معاً بوساطة حبل وبكرتين إحداهما ثابتة والأخرى متحركة، حيث نلاحظ بأن موضع الكتلة A يرتبط ارتباطاً وثيقاً بموضع الكتلة B .



الشكل (7–2)

إذا فرضنا اعتباراً من خط بداية مرجعي مناسب أن الموضع الآني للكتلة A هو S_A والموضع الآني للكتلة B هو S_B ، وإذا لاحظنا أن أجزاء الحبل l_1 وl_2 و l_3 تبقى ثابتة خلال الحركة عندئذ يمكن أن نكتب بعد ملاحظة أن طول الحبل L ثابت العلاقة الآتية:

$$L = s_A + 2s_B + l_1 + l_2 + l_3$$

أو بصيغة أبسط نكتب :

$$L = s_A + 2s_B + constant$$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن تنتج العلاقة الآتية التي تربط بين سرعتي الكتلتين A وB :

$$v_\mathrm{A} + 2v_\mathrm{B} = 0$$

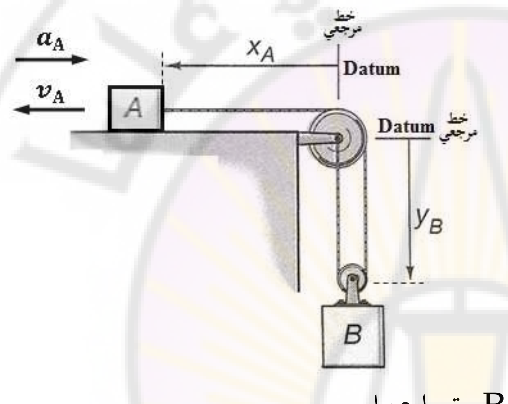
وتكون السرعة موجبة أو سالبة تبعاً لازدياد إحداثية الموضع S أو نقصانها خلال الحركة.

بالاشتقاق مرة أخرى تنتج العلاقة الآتية التي تربط بين تسارعي الكتلتين A وB :

$$a_{\mathrm{A}} + 2a_{\mathrm{B}} = 0$$

وتتعلق إشارة التسارع الموجبة أوالسالبة بازدياد إحداثية الموضع S أو نقصانها خلال الحركة.

مثال رقم (2)



يبين الشكل المرافق كتلتين AوB متصلتين معاً بوساطة حبل ، وتتحرك كل منهما حركة خطية مستقيمة. تتحرك الكتلة A نحو اليسار بسرعة 4m/s وبتسارع مقداره $1\mathrm{m/s^2}$كما هو مبين في الشكل. أوجد سرعة الكتلة B وتسارعها.

الحل : ....

نختار خط البداية المرجعي المناسب، ثم نحدد اتجاه تزايد إحداثية الموضع لكل من الكتلتين كما هو مبين في الشكل. خلال حركة الجملة تتغير إحداثيتا الموضع x_A وy_B فقط بينما تبقى أجزاء الحبل التي تلتف على البكرتين ثابتة (constant)، وبما أن طول الحبل L ثابت فإن:

$$L = x_A + 2y_B + constant$$

بإجراء تفاضل هذه العلاقة ينتج:

$$v_{\mathrm{A}} + 2v_{\mathrm{B}} = 0 \quad \Rightarrow \; v_{\mathrm{B}} = -\frac{v_{\mathrm{A}}}{2} = -2\; m/s\;(\mathrm{up})$$

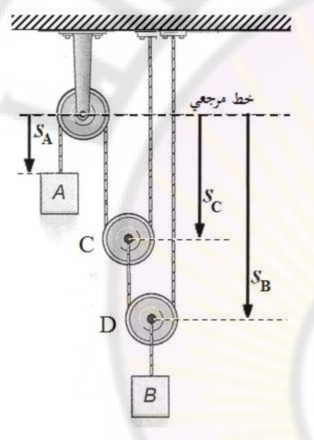
إشارة السالب تشير الى ان اتجاه هذه السرعة بعكس تزايد y_B اي باتجاه الاعلى .وبإجراء التفاضل مرة أخرى نجد :

$$a_A + 2a_B = 0 \Rightarrow a_B = -\frac{a_A}{2} = +\frac{1}{2}\ m/s^2 \text{ (down)}$$

تشير الاشارة الموجبة إلى ان اتجاه هذا التسارع يوافق اتجاه تزايد y_B اي باتجاه الأسفل.

مثال رقم (3)

يبين الشكل المجاور كتلتين A وB متصلتين معاً بمساعدة حبلين وثلاث بكرات. احسب سرعة الكتلة A إذا علمت أن الكتلة B تتحرك باتجاه الأعلى بسرعة تساوي 6m/s .



الحل : ....

نختار خط البداية المرجعي ثم نحدد احداثيات الموضع كما هو مبين في الشكل. بما أن المجموعة المفروضة تتضمن حبلين طول كل منهما ثابت فإن :

$$L_1 = s_A + 2s_C + constant$$

$$L_2 = s_B + (s_B - s_C) + constant$$

$$L_2 = 2s_B - s_C + constant$$

بإجراء التفاضل ينتج:

$$v_A + 2v_C = 0$$

$$2v_B - v_C = 0$$

ومنه نجد :

$$v_A = -2v_C = -2(2v_B) = -4v_B$$

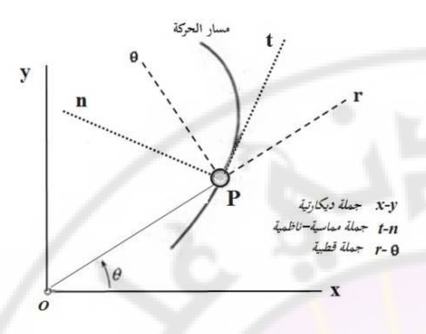
وبالتعويض نحصل على :

$$v_A = -4(-6) = 24\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\text{(down)}$$

الإشارة الموجبة تشير إلى أن اتجاه هذه السرعة يوافق اتجاه تزايد S_A اي باتجاه الاسفل.

3–7 الحركة الخطية المنحنية (Curvilinear Motion)

إذا تحرك جسم ما على امتداد مسار منحن فإن حركته تسمى بالحركة الخطية المنحنية. وعند حل مسائل هذا النوع من الحركات نستخدم إحدى جمل الإحداثيات المبينة في الشكل (7–3) الآتية:



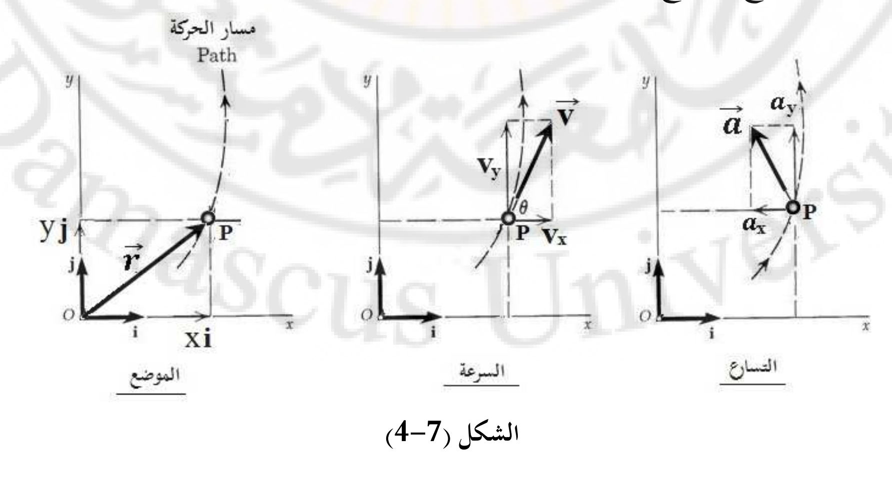
الشكل (7–3)

- جملة الإحداثيات الديكارتية (x,y) .
- جملة الإحداثيات المماسية والناظمية (t,n) .
- جملة الإحداثيات القطبية (r,θ) .

أولاً – طريقة الإحداثيات الديكارتية المتعامدة(x,y):

يجري دراسة الحركة المستوية المنحنية عند استخدام جملة إحداثية ديكارتية ثابتة بدلالة شعاعي الواحدة i و j . حيث تتعين مواصفات الحركة المنحنية عندئذ كما يُظهر الشكل (7–4)باستخدام هذه الإحداثيات كما يلي:

الموضع : عندما يكون موضع الجسيم P في أية لحظة محددا بالإحداثيات الديكارتية (x,y) فإن شعاع الموضع **r** يتعين بالعلاقة الآتية :



الشكل (7–4)

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \quad ; \quad x = f_1(t)\,, y = f_2(t) \qquad (7)$$

السرعة : تتعين السرعة اللحظية للجسيم P بالعلاقة الآتية :

$$\mathbf{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = v_{\mathrm{x}}\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} \qquad (8)$$

حيث :

$$v_{\mathrm{x}} = \dot{x} \;\; ; \;\; v_y = \dot{y}$$

ويكون حامل شعاع السرعة مماساً للمسار في الموضع المدروس ، أما مقدار السرعة فيحسب كما يلي :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

التسارع : يتعين التسارع اللحظي للجسيم P بالعلاقة الآتية :

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = a_{\mathrm{x}}\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} \qquad (9)$$

حيث :

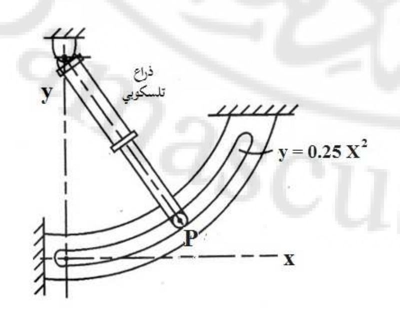
$$a_{\mathrm{x}} = \ddot{x} \;\; ; \;\; a_y = \ddot{y}$$

ويحسب مقدار التسارع من العلاقة :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

مثال رقم (4)

يتحرك الجسيم P المثبّت بنهاية ذراع تلسكوبي حركة خطية منحنية داخل مجرى معادلته تعطى بالعلاقة : $y = 0.25x^2$ ، حيث x وy بوحدة السنتيمتر . احسب باستخدام الإحداثيات الديكارتية سرعة وتسارع الجسيم P عند الزمن t = 6 sec ، بفرض أن : $x = t^2 - 5t$.



الحل : ....

سرعة الجسيم P : لدينا من المعطيات :

$$x = t^2 - 5t$$
$$y = 0.25x^2 = 0.25(t^2 - 5t)^2$$
$$y = 0.25t^4 - 2.5t^3 + 6.25t^2$$

تتعين مركّبتا السرعة v_x و v_y عند الزمن t = 6 sec بعد إجراء التفاضل كما يلي :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2t - 5 = 2(6) - 5$$
$$v_x = 7\ cm/s$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = t^3 - 7.5t^2 + 12.5t$$
$$v_y = (6)^3 - 7.5(6)^2 + 12.5(6) = 21\ cm/s$$

السرعة الكلية المطلوبة هي :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{7^2 + 21^2} = 22.14\ cm/s$$

تسارع الجسيم P : تتعين مركّبتا التسارع a_x و a_y عند الزمن t = 6 sec بعد إجراء التفاضل كما يلي :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2\ cm/s^2$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 3t^2 - 15t + 12.5$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 3(6^2) - 15(6) + 12.5 = 30.5\ cm/s^2$$

التسارع الكلي المطلوب هو :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2^2 + 30.5^2} = 30.6\ cm/s^2$$

ثانياً – طريقة الإحداثيات المماسية والناظمية (t,n):

تتحرك جملة الإحداثيات في هذه الطريقة مع الجسيم p في أثناء انتقاله على امتداد مسار الحركة المنحنية. حيث ينطبق مبدأ جملة الإحداثيات على موضع الجسيم p في اللحظة المدروسة كما هو مبين في الشكل (7–5).



الشكل (7–5)

ويكون محور الجملة الأول t مماساً للمسار في p ويكون موجباً في اتجاه الحركة، ويحدد الاتجاه الموجب باستخدام شعاع الواحدة e_t. ويكون محور الجملة الثاني n عمودياً على المحور الأول ويتجه من p نحو مركز الانحناء ويحدد اتجاهه الموجب باستخدام شعاع الواحدة $\mathbf{e_n}$. وتتعين مواصفات الحركة باستخدام هذه الإحداثيات كما يلي: بفرض أن الجسيم p المبين في الشكل (7–5) قد تحرك مسافة مقدارها ds خلال فترة زمنية dt صغيرة جدا (تفاضلية) على امتداد مسار الحركة. فإذا اعتبرنا أن ρ هي نصف قطر انحناء المسار في الموضع المدروس فإننا نحصل على العلاقة الآتية:

$$ds = \rho \, d\theta \qquad (10)$$

السرعة : يكون اتجاه شعاع السرعة بصورة عامة مماساً لمسار الحركة في الموضع المفروض، أما مقدار السرعة فيتعين بالعلاقة الآتية :

$$v = \frac{ds}{dt} = \rho \, \frac{d\theta}{dt} = \rho \, \dot{\theta}$$

وبناء على ذلك يمكن كتابة السرعة بالصيغة الشعاعية :

$$\mathbf{V} = v\boldsymbol{e_t} = \rho\dot{\theta}\boldsymbol{e_t} \qquad (11)$$

التسارع : للحصول على التسارع ينبغي ملاحظة أن لشعاع الواحدة $\mathbf{e_t}$ مشتقاً بالنسبة للزمن طالما أن اتجاهه يتغير في أثناء انتقال الجسيم p من موضع إلى آخر كما هو مبين في الشكل المذكور آنفاً . ولتعيين التسارع نشتق السرعة بالنسبة للزمن بعد تطبيق القاعدة الرياضية لتفاضل جداء المقدار العددي V بالكمية الشعاعية $\boldsymbol{e_t}$:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{e_t})$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{e_t} + v\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{t}}$$

وبما أن مشتق شعاع الواحدة $\boldsymbol{e_t}$ ، كما سنرى فيما بعد ، يتعين بالعلاقة :

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{t}} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{e_n} = \frac{v}{\rho}\,\boldsymbol{e_n}$$

وبالتعويض ينتج الآتي :

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{e_t} + \frac{v^2}{\rho}\,\boldsymbol{e_n}$$

وبصورة عامة يمكن أن نكتب :

$$\boldsymbol{a} = a_t\boldsymbol{e_t} + a_n\boldsymbol{e_n} \qquad (12)$$

حيث :

$$a_t = \dot{v} \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad (13)$$

تمثل a_t المركبة المماسية للتسارع أو اختصاراً التسارع المماسي ، بينما a_n تمثل المركبة الناظمية للتسارع أو اختصاراً التسارع الناظمي . فإذا كانت سرعة الحركة في حالة ازدياد مع الزمن فإن التسارع المماسي يكون في الاتجاه الموجب للمحور t ، وإذا كانت سرعة

الحركة في حالة تناقص مع الزمن فإن التسارع المماسي يكون في الاتجاه السالب للمحور t . أما التسارع الناظمي فيتجه دائماً نحو مركز الانحناء c .

حالات خاصة :

1. إذا تحرك الجسيم على امتداد خط مستقيم فإن $\rho \to \infty$ وينعدم حينئذ التسارع الناظمي ويصبح التسارع الكلي مساوياً فقط للتسارع المماسي .
2. إذا تحرك الجسيم على مسار منحن بسرعة خطية ثابتة فإن التسارع المماسي ينعدم ويصبح في هذه الحالة التسارع الكلي مساوياً فقط للتسارع الناظمي.
3. إذا تحرك الجسيم على مسار دائري فإن حركته تسمى بالحركة الدائرية . في هذه الحالة يساوي نصف قطر الانحناء ρ نصف القطر الثابت r لدائرة المسار .وتصبح مركبات السرعة والتسارع للحركة الدائرية كالآتي :

$$v = r\,\dot{\theta} = r\,\omega$$

$$a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

4. عند تمثيل مسار الحركة بالمعادلة y=f(x) فإن نصف قطر انحناء المسار ρ في الموضع المدروس يعطى بالعلاقة الآتية :

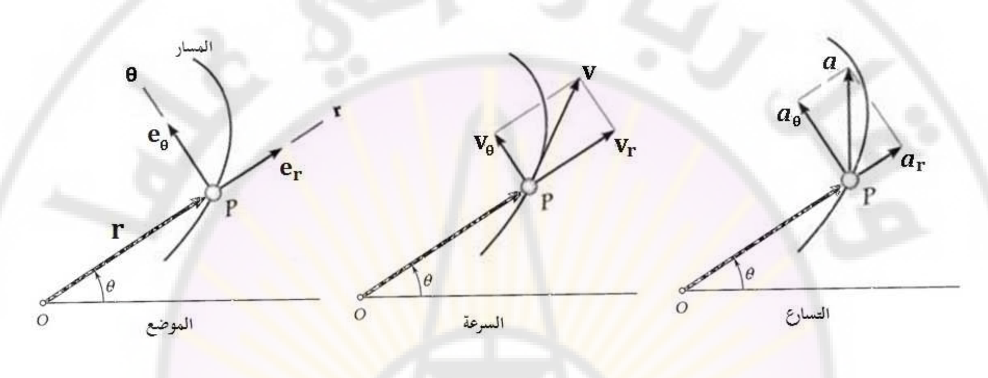
$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (14)$$

حيث :

$\frac{dy}{dx}$: المشتق الأول ، $\frac{d^2y}{dx^2}$: المشتق الثاني

ثالثاً – طريقة الإحداثيات القطبية (r,θ) :

في هذه الطريقة المبينة في الشكل (7–6) يتحدد موضع الجسيم المدروس p بوساطة المسافة r والزاوية θ . حيث تتعين r اعتباراً من القطب الثابت o ، وتتعين الزاوية θ اعتباراً من خط مرجعي ثابت كالمحور الأفقي x .



الشكل (7–6)

وتتحرك جملة الإحداثيات في هذه الطريقة أيضاً مع الجسيم p في أثناء انتقاله على امتداد مسار الحركة المنحنية. لهذا ينطبق مبدأ جملة الإحداثيات على موضع الجسيم p ، ويحدد الاتجاه الموجب للمحور القطبي الأول r باستخدام شعاع الواحدة $\mathbf{e_r}$. ويكون المحور القطبي الثاني θ عمودياً على المحور الأول ويحدد اتجاهه الموجب باستخدام شعاع الواحدة $\mathbf{e_\theta}$. وتتعين مواصفات الحركة المنحنية باستخدام الإحداثيات القطبية (الشكل 7–6)كما يلي :

الموضع : يتعين شعاع موضع الجسيم المفروض بالعلاقة الآتية :

$$\mathbf{r} = \mathrm{r}\boldsymbol{e}_{\mathbf{r}} \qquad (15)$$

السرعة : تتحدد السرعة اللحظية للجسيم المفروض كما يلي :

$$\mathbf{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathrm{r}\boldsymbol{e}_{\mathbf{r}}) = \dot{r}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + r\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

وبما أن المشتق الزمني لكل من شعاعي الواحدة في جملة الإحداثيات القطبية ، كما سنرى فيما بعد ، هو :

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = \dot{\theta}\, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \quad ; \quad \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} = -\dot{\theta}\, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \qquad (16)$$

وبالتعويض ينتج الآتي :

$$\mathbf{V} = \dot{r}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{V} = v_r\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + v_\theta\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \qquad (17)$$

يوضح الشكل المذكور آنفاً المركبتين الناتجتين للسرعة ، وتحسب السرعة الكلية كما يلي:

$$v_r = \dot{r} \quad ; \quad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad (18)$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

التسارع : يتعين التسارع اللحظي للجسيم المفروض كما يلي :

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}\right)$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\boldsymbol{a} = a_r\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + a_\theta\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \qquad (19)$$

يوضح الشكل مركبتي التسارع ، ويحسب التسارع الكلي كما يلي:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad ; \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad (20)$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

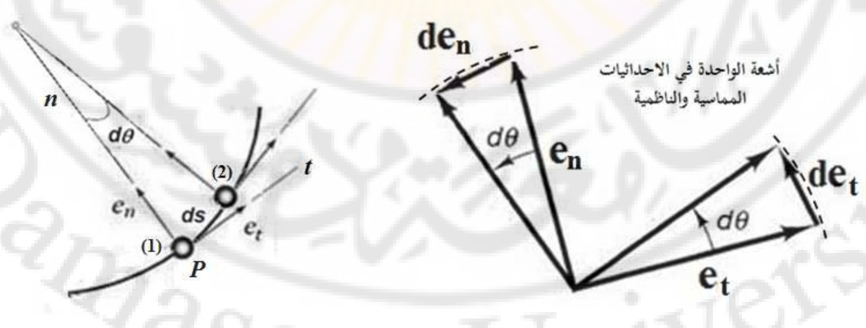
Damascus University

المشتق الزمني لشعاع الواحدة :

عند دراسة الحركة المنحنية باستخدام جملة الإحداثيات الديكارتية يُلاحظ أن اتجاه كل من شعاعي الواحدة يكون ثابتاً لا يتغير في أثناء حركة الجسيم من موضع لآخر . لهذا فإن المشتق الزمني لكل منهما يكون مساوياً للصفر .

أما عند دراسة الحركة المنحنية باستخدام جملة إحداثيات متحركة مع الجسيم المفروض كما هو الحال في طريقتي الإحداثيات(t,n) و (r,θ) فإنه يُلاحظ أن اتجاهات أشعة الواحدة تتغير مع الزمن في أثناء حركة الجسيم من موضع لأخر . لهذا فإن المشتق الزمني لكل منها لا يكون مساوياً للصفر .

أما طريقة استنتاج المشتق الزمني لشعاع الواحدة في جملة الإحداثيات(t,n) مثلاً ، فتعتمد على دراسة التغير الذي يطرأ على ذلك الشعاع عند انتقال الجسيم من نقطة إلى أخرى على امتداد قوس طولها متناه في الصغر . فإذا رسمنا من نقطة اختيارية أشعة الواحدة فإننا نحصل على الشكل(7-7) بعد تكبيره عدة مرات. في هذه الحالة الشعاعان $\mathbf{de_t}$ و$\mathbf{de_n}$ يمثلان ذلك التغير والذي ينتج عن الدوران بزاوية صغيرة جداً مقدارها $d\theta$ وذلك بفعل انتقال الجسيم $\boldsymbol{p}$ من الموضع (1)إلى الموضع(2) .



الشكل (7-7)

وبما أن مقدار شعاع الواحدة $|\mathbf{e}|$ يبقى ثابتاً ويساوي إلى الواحد عندئذ يمكن أن نكتب بالنسبة لشعاعي الواحدة $\mathbf{e_t}$ و$\mathbf{e_n}$ ما يلي :

$$de_t = |e_t| d\theta = d\theta \quad ; \qquad de_n = |e_n| d\theta = d\theta$$

وبالانتقال إلى الصيغة الشعاعية ، نعبر عن الشعاع $\mathbf{de_t}$ بدلالة الشعاع $\mathbf{e_n}$ لأنه يوازيه والشعاع $\mathbf{de_n}$ بدلالة الشعاع $\mathbf{e_t}$ لأنه يوازيه أيضاً ولكن يخالفه في الاتجاه، ثم تقسيم طرفي كل معادلة على dt ينتج أن :

$$d\boldsymbol{e_t} = d\theta\, \boldsymbol{e_n} \quad ; \qquad d\boldsymbol{e_n} = -d\theta\, \boldsymbol{e_t}$$

$$\frac{d\boldsymbol{e_t}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\, \boldsymbol{e_n} \quad ; \qquad \frac{d\boldsymbol{e_n}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\, \boldsymbol{e_t}$$

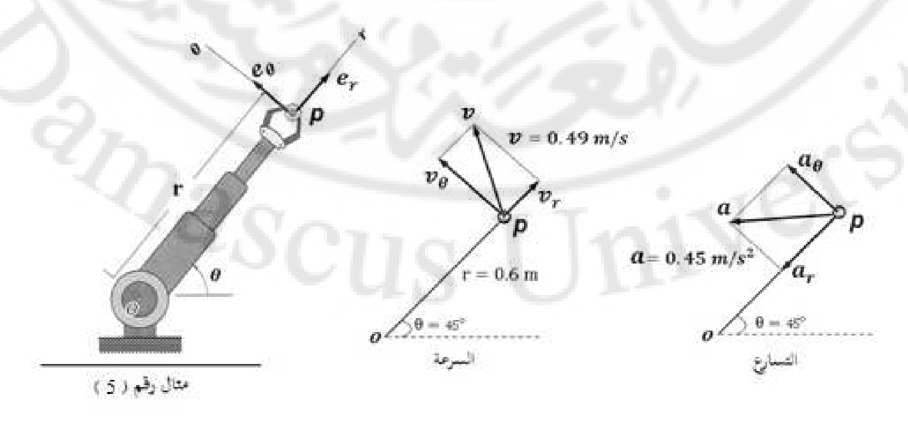
$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{t}} = \dot{\theta}\, \boldsymbol{e_n} \quad ; \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}} = -\dot{\theta}\, \boldsymbol{e_t} \qquad (21)$$

وبنفس الطريقة يمكن تعيين المشتق الزمني لكل من شعاعي الواحدة $\boldsymbol{e_r}$ و $\boldsymbol{e_\theta}$ في الإحداثيات القطبية . فنحصل عندئذ على الآتي :

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = \dot{\theta}\, \boldsymbol{e_\theta} \quad ; \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} = -\dot{\theta}\, \boldsymbol{e_r}$$

مثال رقم (5)

يدور الذراع الآلي Robot المبين في الشكل حول النقطة o ويتغير طوله r في آن واحد . بفرض أن هذا الذراع كان في اللحظة الموافقة للزاوية θ=45° يدور بسرعة زاوية منتظمة مقدارها o.75 rad/s ، كما كان طوله يزداد بمعدل ثابت مقداره 0.2 m/s . ما هي سرعة الرأس القابض p وتسارعه عندما تكون r = 0.6 m .



مثال رقم (5)

الحل : ....

تتعين مركبات السرعة والتسارع باستخدام جملة الإحداثيات القطبية (r,θ) انطلاقاً من المعطيات الآتية :

$$\theta = 45° \quad ; \quad \dot{\theta} = \text{constant} = 0.75\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad ; \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$r = 0.6\ \text{m} \quad ; \quad \dot{r} = \text{constant} = 0.2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad ; \quad \ddot{r} = 0$$

سرعة الرأس القابض p :

$$v_r = \dot{r} \qquad \Rightarrow \qquad v_r = 0.2\ m/s$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad v_\theta = 0.6(0.75) = 0.45\ m/s$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{(0.2)^2 + (0.45)^2} = 0.49\ m/s$$

تسارع الرأس القابض p :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad a_r = 0 - 0.6(0.75)^2 = -0.34\ m/s^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad a_\theta = 0 + 2(0.2)(0.75) = 0.30\ m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{(-0.34)^2 + (0.30)^2} = 0.45\ m/s^2$$

يوضح الشكل المركبات القطبية للسرعة والتسارع بناء على الحسابات السابقة.

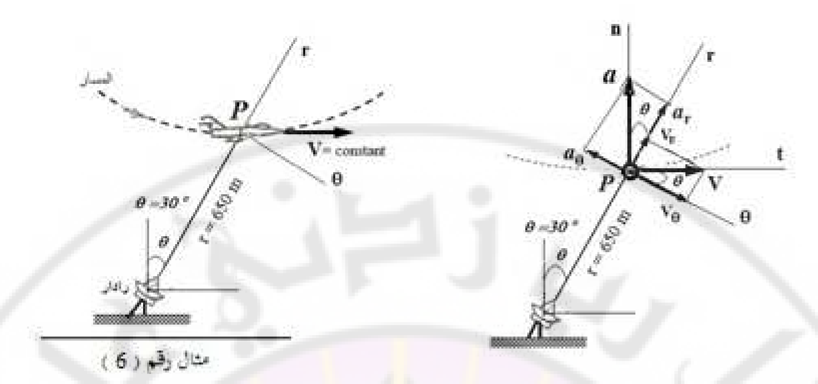
مثال رقم (6)

تحلق طائرة نفاثة بسرعة ثابتة مقدارها 100 m/s على مسار منحن نصف قطره $\rho = 800$ m . عندما تكون الطائرة في الموضع P يكون شعاع السرعة أفقياً ويعطي رادار الرصد البيانات الآتية : $r = 650$ m , $\Theta = 30°$. المطلوب للوضع المبين تحديد ما يلي :

a) المركبات القطبية للسرعة والتسارع .

b) بيانات رادار الرصد الآتية :

$$\dot{r} = ?\ ,\dot{\theta} = ?\ ,\ddot{r} = ?\ \ ,\ddot{\theta} = ?$$



الحل : ....

المركبات القطبية للسرعة والتسارع :

بما أن سرعة الطائرة ثابتة فإن التسارع المماسي للطائرة يساوي صفراً ، وبناء على ذلك يمكن أن نكتب :

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{100^2}{800} = 12.5\, m/s^2$$

من مخطط السرعة والتسارع الموضح في الشكل المبين أعلاه نحصل على المركبات القطبية الآتية :

$$v_r = v \sin\theta = 100\ \sin 30° = 50\, m/s$$

$$v_\theta = v \cos\theta = 100\ \cos 30° = 86.6\, m/s$$

$$a_r = a \cos\theta = 12.5 \cos 30° = 10.83\ \ m/s^2$$

$$a_\theta = -a \sin\theta = -12.5 \sin 30° = -6.25\ \ m/s^2$$

بيانات رادار الرصد :

استناداً إلى مركبات السرعة والتسارع في الإحداثيات القطبية نجد :

$$v_r = \dot{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = 50\, m/s$$

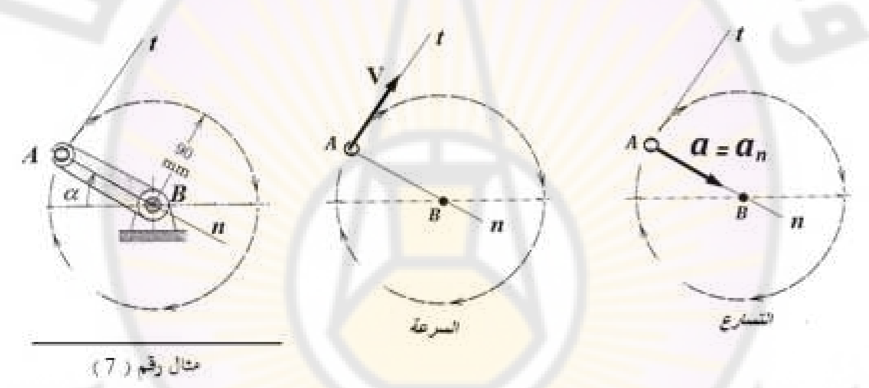
$$v_\theta = r\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} = \frac{86.6}{650} = 0.13\, rad/s$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2 = 10.83\ + 650(0.13\ )^2$$

$$\ddot{r} = 21.82 \quad m/s^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{1}{r}(a_\theta - 2\dot{r}\dot{\theta})$$
$$\ddot{\theta} = \frac{1}{650}[-6.25 - 2(50)(0.13)] = -0.03\, rad/s^2$$

مثال رقم (7)

تتحرك النقطة A على مسار دائري باتجاه عقارب الساعة بفعل دوران عمود المرفق AB بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ω =60 rad/s . عند الوضع الموافق α = 30° احسب باستخدام الإحداثيات المماسية والناظمية سرعة النقطة A وتسارعها.



مثال رقم (7)

الحل : ....

سرعة النقطة A :

بما أن حركة النقطة المفروضة دائرية فإن قيمة السرعة عندئذ تتعين من العلاقة :

$$v = \omega r \quad \Rightarrow \quad v = 60(0.09) = 5.4\, m/s$$

ويكون اتجاهها مماساً للمسار الدائري في النقطة A كما هو مبين في الشكل.

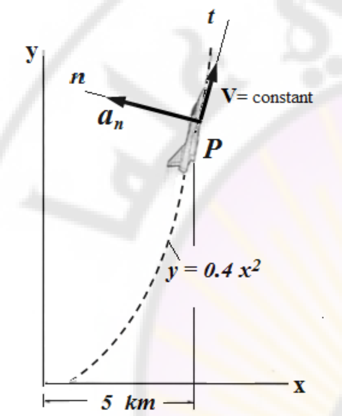
تسارع النقطة A :

يتكون تسارع النقطة A من مركبة مماسية وأخرى ناظمية . المركبة المماسية تساوي صفراً لأن العمود يدور بسرعة زاوية منتظمة ، أما المركبة الثانية فتحسب من العلاقة :

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad a = a_n = \frac{5.4^2}{0.09} = 324\ m/s^2$$

ويكون شعاع التسارع الكلي في اتجاه مركز الدوران B كما هو مبين في الشكل.

مثال رقم (8)



تحلق طائرة نفاثة (Jet plane) **P** بسرعة ثابتة مقدارها 200 m/s على مسار منحن معادلته $y = 0.4x^2$ كما هو مبين في الشكل . عندما تكون $x = 5$ Km احسب ما يلي :

(1) نصف قطر تقوس المسار (ρ)

(2) التسارع الكلي للطائرة **P**

الحل : ....

نصف قطر تقوس المسار:

بما أن مسار الحركة معطى بالمعادلة $y = 0.4x^2$ ، فإن نصف قطر انحناء المسار ρ في الموضع $x = 5$ Km يحسب بالعلاقة الآتية :

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{[1+(4)^2]^{\frac{3}{2}}}{0.8} = 87.62 \text{ km}$$

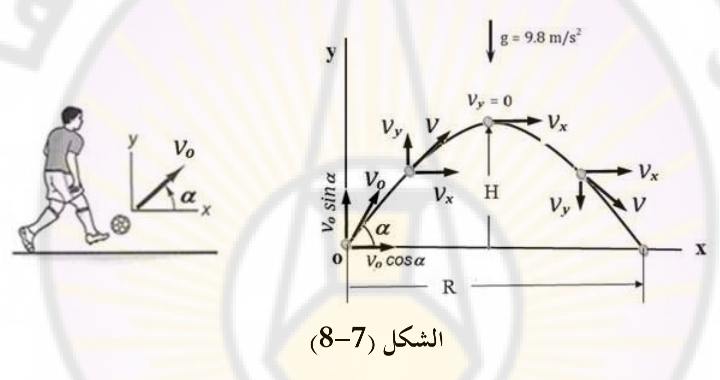
تسارع الطائرة :

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{200^2}{87620} = 0.46\ m/s^2$$

7–6 حركة المقذوفات (Projectile Motion):

إن دراسة حركة القذف تجري عادة باستخدام جملة الإحداثيات الديكارتية (x,y) . وتتصف هذه الحركة بتسارع ثابت هو تسارع الجاذبية الأرضية والذي يساوي $9.8 m/s^2$ واتجاهه نحو الأسفل. لبحث هذه الحركة نتصور جسماً أطلق من النقطة o بسرعة ابتدائية v_o تصنع مع خط الأفق زاوية إطلاق مقدارها α كما هو واضح في الشكل (7–8) .

إن هذه الحركة يمكن استبدالها بحركتين مستقيمتين ومستقلتين إحداهما في الاتجاه الأفقي x تسمى الحركة الأفقية والأخرى في الاتجاه الشاقولي y تسمى الحركة الشاقولية .



الشكل (7–8)

الحركة الأفقية : نسقط معادلات الحركة ذات التسارع الثابت على المحور الأفقي x فينتج:

$$v = v_0 + at \qquad \Rightarrow \quad v_x = v_0 \cos\alpha \qquad (22)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad x = v_0 \cos\alpha \, t \qquad (23)$$

تبين هذه المعادلات أن حركة القذيفة في الاتجاه الأفقي هي حركة منتظمة $(v_x = const.)$.

الحركة الشاقولية : نسقط معادلات الحركة المستقيمة على المحور الشاقولي y فينتج :

$$v = v_0 + at \qquad \Rightarrow \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt \qquad (24)$$

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow y = v_0 \sin\alpha \, t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (25)$$

وتدعى هذه الحركة حركة السقوط الحر .

معادلة المسار : لتعيين معادلة المسار نحسب الزمن من المعادلة (23) ثم نعوض في المعادلة(25) فينتج :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}\right)$$

$$y = (\tan\alpha)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right) x^2 \qquad (26)$$

وهذه هي معادلة المسار $y=f(x)$ ، ولها استخدامات كثيرة في حل المسائل. وللحصول على الزمن الذي يستغرقه الجسم المقذوف للوصول إلى سطح الأرض ، نعوض القيمة $y=0$ في المعادلة (25) ، فينتج :

$$0 = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}\, g t^2$$

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \qquad (27)$$

ومن العلاقتين (23) و (27) يمكن تعيين المدى الأفقي R للجسم المقذوف كما يلي :

$$x = v_0 \cos\alpha\, t \;\Rightarrow R = v_0 \cos\alpha \left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\right)$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (28)$$

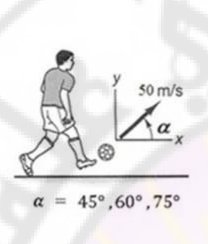
وللحصول على أقصى ارتفاع H نستخدم المعادلاتين (24)و(25) مع ملاحظة أن $v_y=0$ في هذه الحالة :

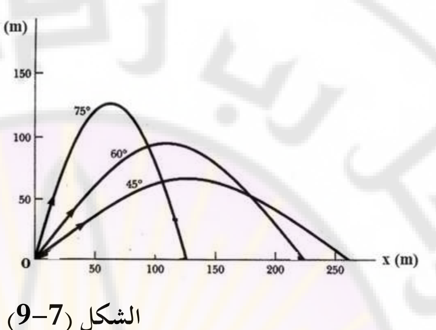
$$0 = v_0 \sin\alpha - gt \;\Rightarrow t = \frac{v_o \sin\alpha}{g}$$

$$H = v_0 \sin\alpha \left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad (29)$$

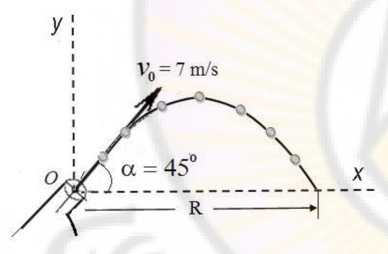
يوضح الشكل(7–9) مسارات الحركة لكرة قذفت بسرعة ابتدائية قدرها 50 m/s عند قيم مختلفة لزاوية الإطلاق α وذلك بتطبيق معادلة المسار .





الشكل (7–9)

مثال رقم (9)



تقوم آلة بقذف أحد المنتجات الصناعية بسرعة ابتدائية مقدارها 7 m/s كما هو موضح في الشكل المجاور. إذا علمت أن فوهة التفريغ تميل بزاوية قدرها 45° عن سطح الأرض. المطلوب :

1. تحديد الموضع الذي يتجمع عنده المنتج (R = ?)
2. الزمن الذي يستغرقه المنتج للوصول إلى سطح الأرض.

الحل : ....

الموضع : يتحدد الموضع الذي يتجمع عنده المنتج باستخدام العلاقة الآتية :

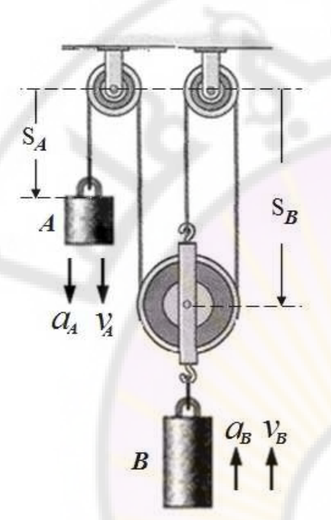
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{7^2 \sin 90°}{9.8} = 5\, m$$

الزمن : يتعين الزمن الذي يستغرقه المنتج للوصول إلى سطح الأرض باستخدام العلاقة:

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2(7) \sin 45°}{9.8} = 1\, sec$$

مسائل غير محلولة
UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :



تبدأ المجموعة الموضحة في الشكل حركتها من السكون . إذا كانت في اللحظة المبينة سرعة حركة الاسطوانة A تساوي 6 m/s(↓) وتسارعها $1.5 m/s^2$(↓) فأوجد عندئذ الآتي :

a) سرعة حركة الاسطوانة B .

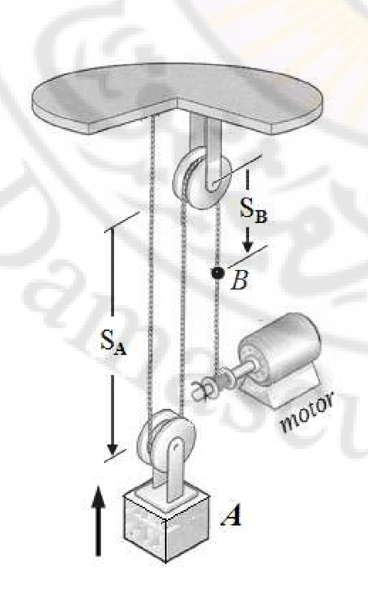
b) تسارع حركة الاسطوانة B .

c) المسافة التي تقطعها كل من الاسطوانتين بعد مرور ثلاث ثوان على بدء الحركة .

الجواب :

V_B=2 m/s(↑) ; $a_B=0.5 m/s^2$ (↑) ; S_A=6.75 m ; S_B=2.25 m

مسألة رقم (2) :



يقوم محرك كهربائي برفع الثقل A من حالة السكون بانتظام (v=constant) ، وذلك بمساعدة المجموعة المبينة في الشكل. إذا علمت أن سرعة النقطة B تساوي 8m/s ، فأوجد :

a) سرعة الحمل A .

b) الزمن الذي يحتاجه الحمل A كي يتحرك للأعلى مسافة مقدارها 10 m .

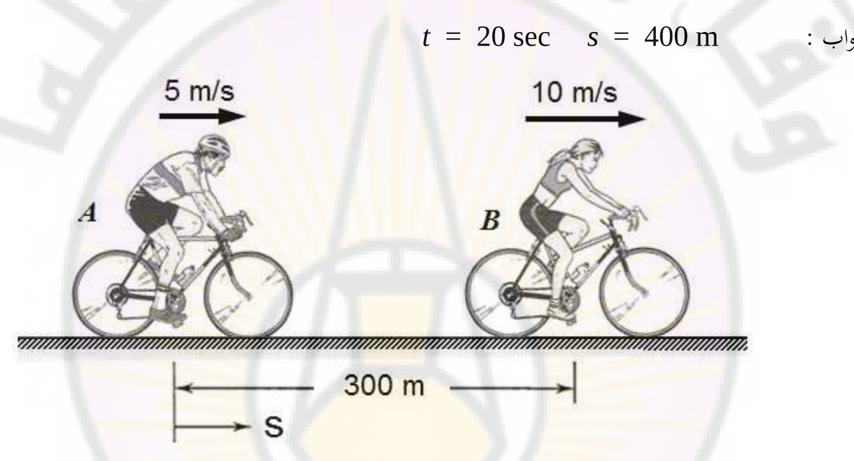
الجواب :

V_A = 4 m/s(↑) , t = 2.5 sec

مسألة رقم (3) :

تسير درّاجتان هوائيتان بسرعتين مختلفتين على طريق مستقيم . عند الزمن t=0 يكون لكلّ من هاتين الدرّاجتين المعطيات الموضحة في الشكل.إذا كانت حركة الدرّاجة A تتسارع بمعدل ثابت قدره $1.5\ m/s^2$ ، بينما تتباطأ حركة الدرّاجة B بمعدل $0.5\ m/s^2$ فأوجد عندئذ: 1– الزمن الذي تحتاجه الدرّاجة A كي تدرك الدرّاجة B. 2– موضع الدرّاجتين لحظة التقائهما .

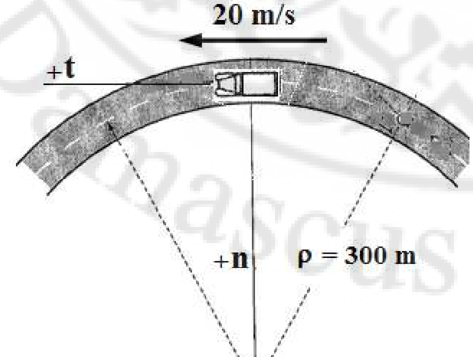
الجواب : $t = 20\ sec \quad s = 400\ m$



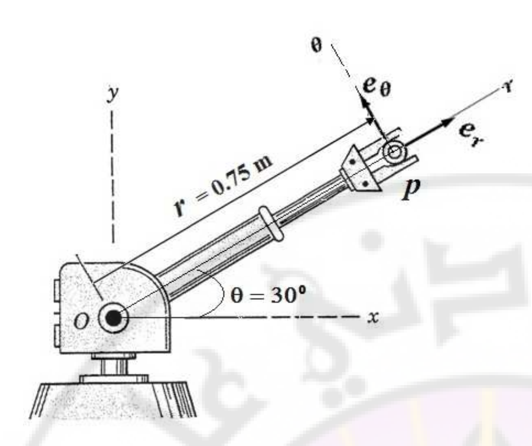
مسألة رقم (4) :

سيارة تتحرك على مسار منحن نصف قطره ρ = 300 m كما هو موضح في الشكل.خلال الحركة ارتفعت سرعة السيارة من 15m/s إلى 27m/s في فترة زمنية مقدارها 3sec . أوجد في اللحظة الموافقة للسرعة 20m/s تسارع حركة السيارة .

الجواب : $a = 4.22\ m/s^2$



مسألة رقم (5) :



يدور الذراع الآلي Robotic arm المبين في الشكل حول النقطة O ويتغير طوله r في آن واحد. ما هي سرعة الرأس القابض p وتسارعه عند الشروط الآتية :

$$\dot{r} = 0.2\, m/s \quad , \quad \ddot{r} = -0.3\, m/s^2$$
$$\dot{\theta} = constant = 0.18\, rad/s$$

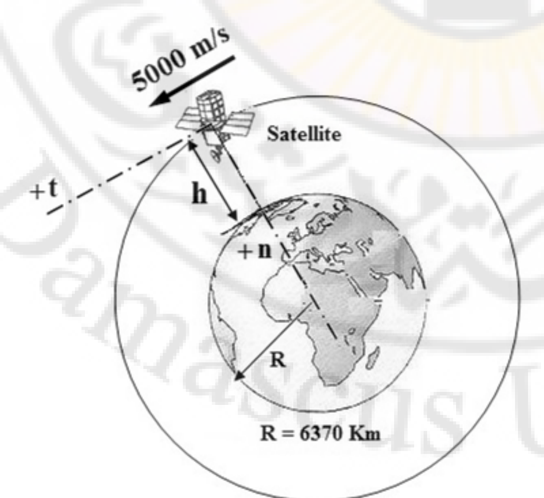
الجواب :

$$\mathbf{V} = 0.2\boldsymbol{e_r} + 0.14\boldsymbol{e_\theta} \quad ; \quad \boldsymbol{a} = -0.32\boldsymbol{e_r} + 0.07\boldsymbol{e_\theta}$$

مسألة رقم (6) :

يتحرك القمر الصناعي Satellite الموضح في الشكل حول الأرض في مسار دائري. خلال الحركة كانت سرعة القمر ثابتة وتساوي 5000m/s ، وكان تسارعه مساوياً $2.5 m/s^2$. أوجد المسافة h التي تمثل بعد القمر عن الأرض ، بفرض أن نصف قطر الأرض يساوي 6370 km .

الجواب : $h = 3630$ km



الفصل الثامن

حركة الأجسام الصلبة

KINEMATICS OF RIGID BODIES

8-1 الحركة الانسحابية (Translation).

8-2 الحركة الدورانية (Rotation about fixed axis).

8-3 الحركة المستوية العامّة (General Plane Motion).

8-4 الحركة المركَّبة للجُسَيْمات (Compound Motion of Particles).

8-5 الحركة الفراغية (Three-Dimensional Motion).

تمهيد : يبحث هذا الفصل في خصائص الحركة للأجسام الصلبة الواقعة في مستو واحد بشكل رئيسي ، ثم يتناول بعجالة حركة الأجسام في ثلاثة أبعاد . وعلى وجه العموم تصنف أشكال الحركة المستوية للجسم الصلب كما هو موضح في الشكل(8-1) إلى الأنواع الآتية :

1. الحركة الانسحابية أو الانتقالية (Translation) : وهي حركة الجسم الصلب والتي يبقى خلالها أي خط مستقيم (AB مثلاً) مأخوذ في هذا الجسم موازياً لنفسه. وفي هذه الحالة ترسم جميع النقاط في الجسم مسارات خطية مستقيمة أو مسارات خطية منحنية .
2. الحركة الدورانية (Rotation about fixed axis) : وهي حركة الجسم الصلب والتي يدور خلالها أي خط مستقيم (AB مثلاً) مأخوذ في هذا الجسم حول محور ثابت بزاوية ما. وترسم عندئذ كل نقطة من نقاط الجسم مساراً دائرياً .

أنواع الحركة المستوية للجسم الصلب		
الحركة الانسحابية	الحركة الدورانية	الحركة المستوية العامة
النوع الأول : انسحابية مستقيمة النوع الثاني : انسحابية منحنية		

الشكل (8–1)

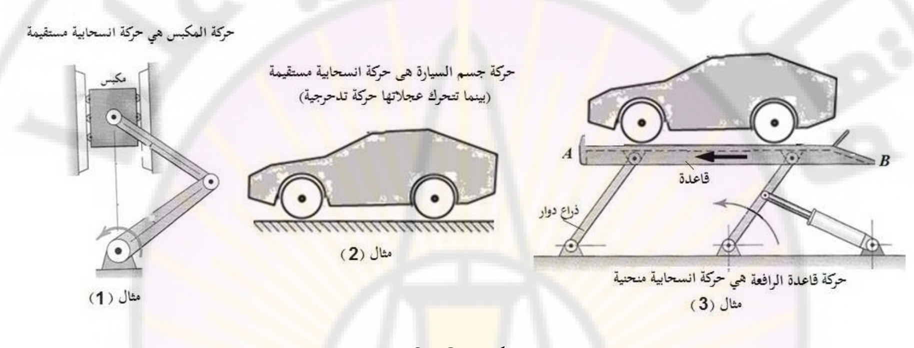
3. الحركة المستوية العامة (General plane motion) : وهي حركة الجسم الصلب والتي يتحرك خلالها أي خط مستقيم (AB مثلا) مأخوذ في هذا الجسم حركة انسحابية ودورانية في آن واحد . يظهر الشكل(8–2) بعض الأمثلة على الأنواع المختلفة لحركات الأجسام الصلبة.

أمثلة على أنواع حركة الجسم الصلب		
الحركة الانسحابية	الحركة الدورانية	الحركة المستوية العامة
حركة انسحابية مستقيمة مثال (1): الحركة الانتقالية لصندوق	مثال (1) : دوران مسنن	مثال (1):انزلاق عمود
حركة انسحابية منحنية مثال (2): الحركة الانتقالية لصفيحة	مثال (2): الحركة الدورانية لصفيحة	مثال (2): الحركة التدحرجية لعجلة

الشكل (8–2)

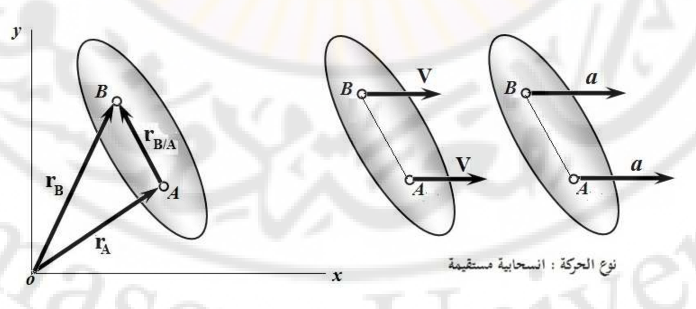
8–1 الحركة الانسحابية (Translation) :

نصادف في حياتنا الكثير من التطبيقات على الحركة الانسحابية ، ومنها على سبيل المثال النماذج المبينة في الشكل(8-3) . ولتعيين خصائص حركة الجسم الصلب في الحركة الانسحابية نقوم بوصف حركة أي نقطة منه لأن لجميع نقاط الجسم في كل لحظة زمنية سرعات وتسارعات متساوية قيمة واتجاهاً .



الشكل (8–3)

وللإثبات نفرض جسماً يتحرك حركة انسحابية بالنسبة لجملة الإحداثيات الديكارتية *oxy* .نأخذ في هذا الجسم نقطتين اختياريتين A وB حيث يتحدد موضعهما في اللحظة الزمنية t بشعاعي الموضع r_A وr_B كما هو مبين في الشكل(8-4).



الشكل (8–4)

نرسم الشعاع $r_{B/A}$ الواصل بين هاتين النقطتين وعندئذ يكون :

$$r_B = r_A + r_{B/A} \qquad (1)$$

Damascus University

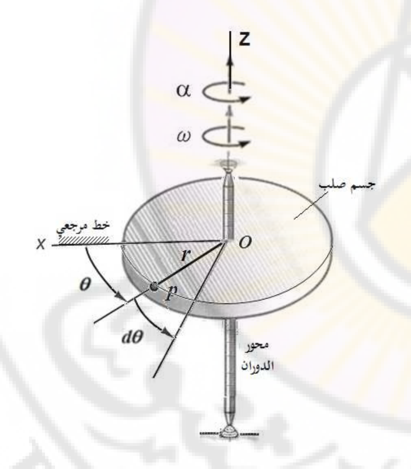
ولتعيين العلاقة بين سرعة وتسارع كل من النقطتين A و B ، نشتق طرفي العلاقة السابقة بالنسبة للزمن مرتين متتاليتين ، مع ملاحظة أن الشعاع $r_{B/A}$ يبقى ثابتاً مقداراً واتجاهاً خلال فترة الحركة ، فنحصل على :

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A \quad ; \quad \boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A \qquad (2)$$

وبما أن النقطتين A وB اختياريتان ، لذا نستنتج أن سرعات كل نقاط الجسم متساوية مقداراً واتجاهاً في أية لحظة زمنية ، وكذلك الأمر بالنسبة للتسارع .

2-8 الحركة الدورانية (Rotation about fixed axis) :

لا بدّ من الإشارة في البداية إلى ضرورة عدم الخلط بين مفهوم الحركة الدائرية للجسيمات ومفهوم الحركة الدورانية للجسم الصلب . إن السرعة الزاويّة ω (Omega) والتسارع الزاوي α (Alpha) هما الصفتان الأساسيتان للحركة الدورانية للجسم الصلب. يوضح الشكل(8-5) جسماً صلباً يدور حول المحور الثابت z . في هذه الحالة ترسم جميع نقاط الجسم كالنقطة p مثلاً ، مسارات دائرية حول المحور ، كما أن جميع خطوط الجسم، كالخط op مثلاً ،تدور بنفس السرعة الزاوية وبنفس التسارع الزاوي. ولهذا تتعين علاقات الحركة الزاوية لجسم ما بتحديد علاقات الحركة الزاوية لأي خط من الجسم اعتباراً من خط مرجعي ثابت كما يلي :



الشكل (8-5)

1. **الموضع الزاوي** : يتعين الموضع الزاوي للخط op بزاوية الدوران θ المأخوذة اعتباراً من خط مرجعي ثابت . وبما أن هذه الزاوية تتغير مع الزمن فإن :

$$\theta = f(t) \qquad (3)$$

وتقدر عادة بوحدة الراديان (rad) ، وفي بعض الحالات تعطى بعدد اللفات (rev)

حيث :

$$one\ revolution = 2\pi\ rad = 360°$$

2. **السرعة الزاويّة** : السرعة الزاوية هي المشتق الزمني الأول لإحداثية الموضع الزاوي :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (4)$$

وتقدر عادة بوحدة الراديان على الثانية (rad/s) ، ونعتبرها موجبة إذا تم دوران الجسم في عكس اتجاه عقارب الساعة.

3. **التسارع الزاوي** : التسارع الزاوي هو المشتق الزمني الأول للسرعة الزاوية. أي أن :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (5)$$

ويقدر عادة بوحدة الراديان على الثانية المربعة (rad/s^2) .ونعتبر التسارع الزاوي موجباً عندما يكون في الاتجاه الموجب للسرعة الزاوية . ومن ناحية أخرى ، تكون الحركة الدورانية متسارعة إذا كان للسرعة الزاوية والتسارع نفس الاتجاه ، وتكون الحركة الدورانية متباطئة إذا كان للسرعة الزاوية والتسارع اتجاهين مختلفين. بحذف الزمن من علاقتي السرعة الزاوية والتسارع الزاوي المذكورتين نحصل على العلاقة الآتية :

$$\omega d\omega = \alpha d\theta \qquad (6)$$

عندما يتحرك الجسم حركة دورانية متغيرة بانتظام (α =constant) فإننا نحصل من تكامل المعادلات السابقة على :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (7)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (8)$$

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (9)$$

Damascus University

تمثل هنا θ_0 و ω_0 قيم إحداثية الموضع والسرعة الزاوية على الترتيب في لحظة بدء الحركة . إن طريقة تكامل العلاقات السابقة مماثل تماماً للطريقة التي استخدمت في تكامل معادلات الحركة الخطية بتسارع ثابت والمذكورة في الفصل السابع .

حركة نقطة من نقاط الجسم الدائر (Motion of a point) :

بعد تعيين علاقات الحركة الزاويّة، يمكن بسهولة البحث في تحديد سرعة وتسارع نقطة من جسم يدور حول محور ثابت .

1. **تعيين السرعة الخطية** : بالعودة إلى الشكل(8-5) ، وبفرض أن النقطة p تبعد مسافة مقدارها r عن محور الدوران z ، فإذا حدث للجسم إزاحة زاوية $d\theta$ خلال زمن صغير جداً dt ، فإن تلك النقطة سوف تتحرك على امتداد مسارها الدائري مسافة مقدارها تحسب بالصيغة الآتية :

$$ds = rd\theta \qquad (10)$$

وعندئذ يمكن حساب السرعة اللحظية الخطية بالعلاقة :

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = r\omega \qquad (11)$$

وهكذا فإن السرعة الخطية لنقطة ما تساوي عددياً حاصل ضرب السرعة الزاوية للجسم بمقدار بُعد تلك النقطة عن محور الدوران .ويكون شعاع السرعة الخطية مماساً للدائرة التي ترسمها النقطة المفروضة. وبما أن ω لها في كل لحظة قيمة واحدة لكافة نقاط الجسم، فإنه ينتج أن السرعات الخطية لنقاط الجسم الدائر تتناسب طرداً مع بُعدها عن محور الدوران .

2. **تعيين التسارع الخطي** : يتحدد التسارع الكلي للنقطة p انطلاقاً من تحديد مركبتيه المماسية $\boldsymbol{a}_t$ والناظمية $\boldsymbol{a}_n$ وذلك باستخدام العلاقتين :

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{r}$$

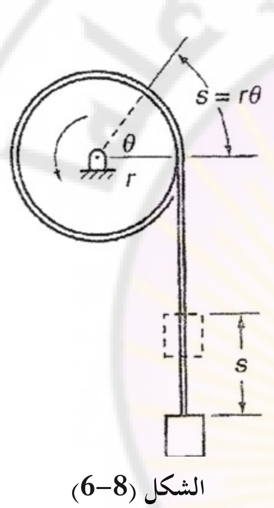
وبالتعويض في هاتين العلاقتين بقيمة v من معادلة السرعة السابقة نحصل على:

$$a_t = r\alpha \quad ; \quad a_n = r\omega^2 \tag{12}$$

ويكون شعاع التسارع المماسي a_t مماساً للمسار، بينما يتجه التسارع الناظمي a_n على امتداد نصف القطر نحو محور الدوران .

العلاقة بين الحركة الانسحابية والحركة الدورانية :

في حالات كثيرة كالموضحة في الشكل(8-6) والتي تتضمن مجموعة من الأجسام الموصولة، لا بدّ من معرفة العلاقة التي تربط عناصر الحركة الخطية المستقيمة (s,v,a) وعناصر الحركة الدورانية (θ,ω,α).



الشكل (8–6)

لهذا الغرض نفرض أنه لدينا بكرة تدور حول محور ثابت ويلتف حولها حبل محمل في نهايته الحرة بثقل كما هو مبين في الشكل المذكور. من الملاحظ أنه عندما تدور البكرة بزاوية θ في عكس اتجاه عقارب الساعة مثلاً فإن الحبل يرتفع للأعلى ليلامس البكرة بطول مقداره s يتحدد بالعلاقة الآتية:

$$s = r\theta \tag{13}$$

باشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن نحصل على سرعة الثقل وتسارعه بدلالة السرعة الزاويّة والتسارع الزاوي للبكرة وذلك كما يلي :

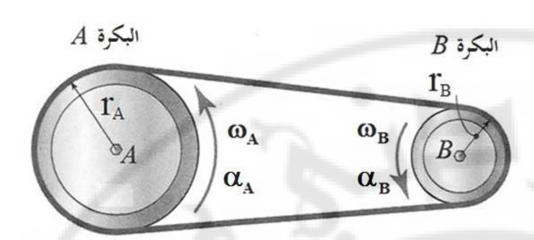
$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \tag{14}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \tag{15}$$

وهكذا أصبحت العلاقة واضحة بين عناصر الحركة الدورانية للبكرة وعناصر الحركة الانسحابية المستقيمة للثقل.

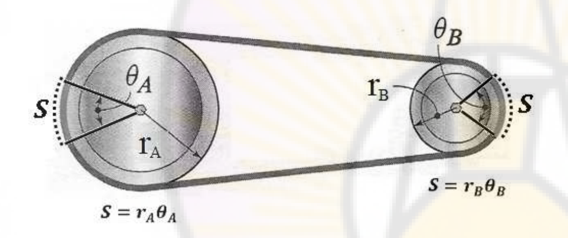
مثال رقم (10)

أعطيت البكرة القائدة A سرعة زاوية مقدارها 340 rad/s وتسارعاً زاوياً مقداره $120 rad/s^2$ وكلاهما في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة كما هو مبين في الشكل. أوجد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للبكرة B ، وذلك بفرض أن الحزام الذي ينقل الحركة لا ينزلق عند مروره فوق البكرتين.



الحل : ....

عندما تدور البكرة الكبرى A زاوية مقدارها θ_A كما هو موضح في الشكل فإن البكرة الصغرى B سوف تدور بزاوية اكبر مقدارها θ_B وسيتحرك عندئذ الحزام مسافة S طولها يتعين بالعلاقة الآتية:



$$s = r_A\theta_A = r_B\theta_B$$

باشتقاق هذه العلاقة مرتين بالنسبة للزمن نستنتج أن جميع نقاط الحزام تتحرك بنفس السرعة v وبنفس التسارع المماسي a_t ، وذلك كما يلي :

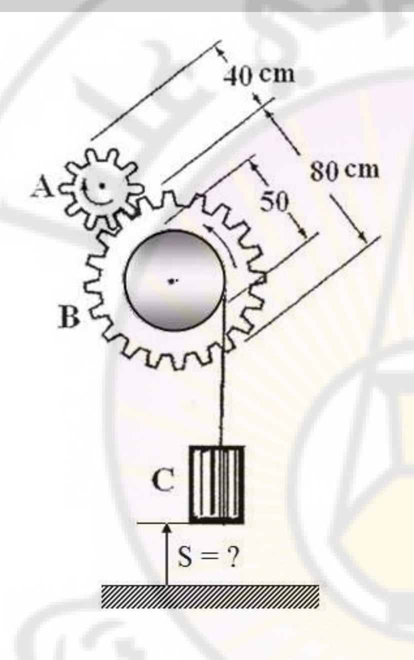
$$v = r_A\omega_A = r_B\omega_B$$

$$a_t = r_A\alpha_A = r_B\alpha_B$$

ومن هاتين العلاقتين نحصل على السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للبكرة B على النحو الآتي :

$$\omega_B = \frac{r_A}{r_B}\omega_A = \frac{18}{12}(340) = 510\, rad/s$$
$$\alpha_B = \frac{r_A}{r_B}\alpha_A = \frac{18}{12}(120) = 180\, rad/s^2$$

مثال رقم (11)



يُدار المسنن A في اتجاه عقارب الساعة من وضع السكون وبتسارع منتظم مقداره $8rad/s^2$ ، فيكتسب عندئذ العمود المثبت على المسنن B حركة تؤدي إلى سحب الثقل C للأعلى كما هو مبين في الشكل.أوجد بعد مرور 3 ثوان على بدء الحركة ما يلي:

1. السرعة الزاوية للمسنن A .
2. السرعة الزاوية للمسنن B .
3. التسارع الزاوي للمسنن B .
4. السرعة الخطية والتسارع الخطي للثقل C .
5. ارتفاع الثقل عن سطح الأرض (s=?) .

الحل : ....

نلاحظ من معطيات المسألة أن حركة المجموعة متسارعة بانتظام ، ولهذا يمكن استخدام قوانين الحركة ذات التسارع الثابت .

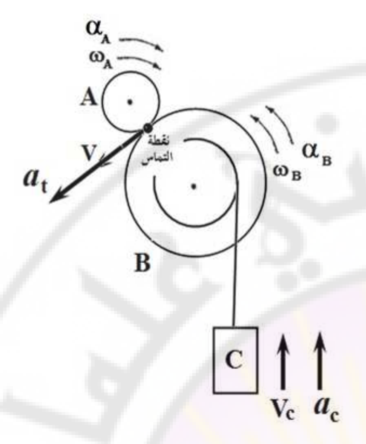
السرعة الزاوية للمسنن A : تتعين هذه السرعة باستخدام العلاقة الآتية:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

بالتعويض نجد :

$$\omega_A = 0 + 8(3) = 24\,rad/s$$

السرعة الزاوية للمسنن B : تتعين هذه السرعة من علاقة السرعة الخطية لنقطة التماس المشتركة بين المسننين A وB وذلك كما يلي :



$$v = r_A\omega_A = r_B\omega_B$$

$$\omega_B = \frac{r_A}{r_B}\omega_A = \frac{20}{40}(24)$$

$$= 12\,rad/s$$

التسارع الزاوي للمسنن B : يتحدد هذا التسارع من علاقة التسارع المماسي لنقطة التماس المشتركة بين المسننين A وB وذلك كما يلي :

$$a_t = r_A\alpha_A = r_B\alpha_B$$

$$\alpha_B = \frac{r_A}{r_B}\alpha_A = \frac{20}{40}(8) = 4\,rad/s^2$$

سرعة وتسارع الثقل C : تحسب سرعة الثقل وتسارعه على النحو الآتي:

$$v_C = r\omega_B = 0.25 \times 12 = 3\text{ m/s}$$

$$a_C = r\alpha_B = 0.25 \times 4 = 1\text{ m/s}^2$$

ارتفاع الثقل عن سطح الأرض : بما أن حركة الثقل متسارعة بانتظام فإنه يمكن استخدام علاقة الحركة الخطية ذات التسارع الثابت الآتية :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0) \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a}$$

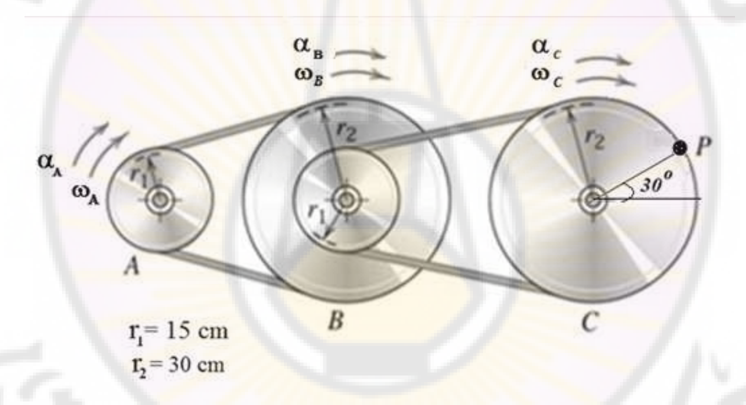
بالتعويض نجد :

$$s = \frac{3^2}{2(1)} = 4.5\,m$$

مثال رقم (12)

تبدأ البكرة A حركتها من السكون وبتسارع منتظم مقداره $10\ rad/s^2$ في اتجاه عقارب الساعة كما هو موضح في الشكل .ونتيجة لذلك تدور البكرة C عن طريق البكرة المزدوجة B وزوج من السيور المتحركة . احسب في اللحظة الموافقة للزمن $t = 3\ sec$ ما يلي:

- السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للبكرة المزدوجة B .
- السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للبكرة C .
- سرعة وتسارع النقطة P الواقعة على محيط البكرة C .



الحل : ....

السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للبكرة المزدوجة B :

بما أن التسارع الزاوي للبكرة A ثابت فإننا نحصل على سرعتها الزاوية من العلاقة:

$$\omega_A = \omega_0 + \alpha_A t = 0 + 10(3) = 30\ rad/s$$

وبملاحظة أن :

$$v = r_A\omega_A = r_B\omega_B$$

$$a_t = r_A\alpha_A = r_B\alpha_B$$

ومن هذه العلاقات نجد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للبكرة المزدوجة وذلك كما يلي :

$$\omega_B = \frac{r_A}{r_B}\omega_A = \frac{15}{30}(30) = 15\, rad/s$$
$$\alpha_B = \frac{r_A}{r_B}\alpha_A = \frac{15}{30}(10) = 5\, rad/s^2$$

السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للبكرة C :

وبطريقة مماثلة لما سبق يمكن أن نكتب بشأن نقاط السير الأيمن ما يلي :

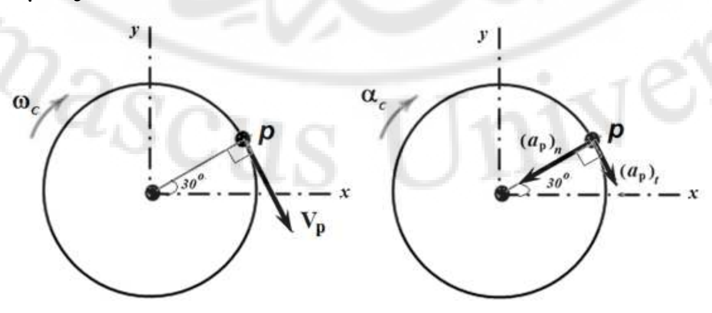
$$v = r_B\omega_B = r_C\omega_C$$

ومن هذه العلاقات نجد أن :

$$\omega_C = \frac{r_B}{r_C}\omega_B = \frac{15}{30}(15) = 7.5\, rad/s$$
$$\alpha_C = \frac{r_B}{r_C}\alpha_B = \frac{15}{30}(5) = 2.5\, rad/s^2$$

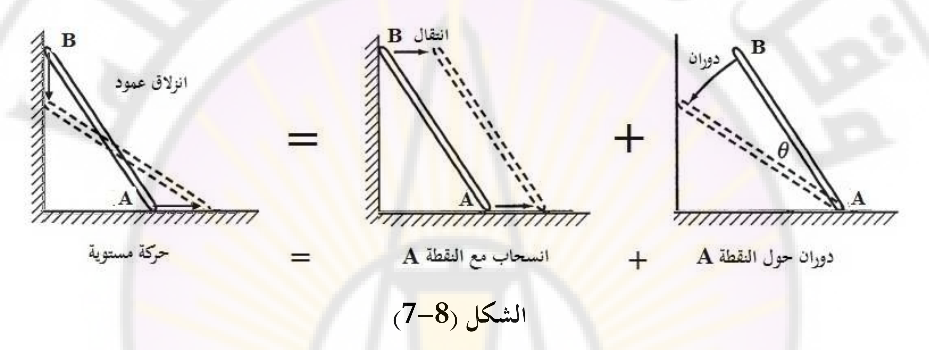
سرعة وتسارع النقطة P الواقعة على محيط البكرة C : يُظهر الشكل التمثيل البياني لسرعة وتسارع النقطة P . وتتعين قيمة كل منهما على النحو الآتي :

$$v_p = r_C\omega_C = 0.3\times\ 7.5 = 2.25\, m/s$$
$$(a_P)_t = r_C\alpha_C = 0.3\times 2.5 = 0.75\, m/s^2$$
$$(a_P)_n = r_C\omega_C^2 = 0.3\times 7.5^2 = 16.88\, m/s^2$$
$$a_P = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0.75^2 + 16.88^2} = 16.9 m/s^2$$



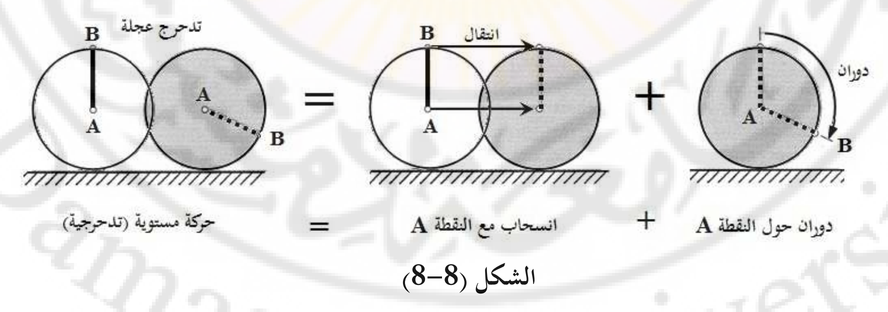
8–3 الحركة المستوية العامة (General plane motion) :

يبين الشكل(8–7) كيفية استبدال الحركة المستوية العامة لعمود منزلق بحركتين : إحداهما انسحابية مع النقطة A والأخرى دورانية حول نفس النقطة وذلك في الاتجاه المعاكس لعقارب الساعة. ويمكن الحصول على نفس النتيجة إذا اعتبرنا أن الحركة هي تعاقب حركتين : إحداهما انسحابية مع النقطة B والأخرى دورانية حول النقطة نفسها.



الشكل (8–7)

ويبين الشكل(8–8) كيفية استبدال الحركة المستوية العامة لعجلة متدحرجة بحركتين : إحداهما انسحابية مع المركز A والأخرى دورانية حول نفس المركز وذلك في اتجاه دوران عقارب الساعة.



الشكل (8–8)

تشكل علاقات الحركة النسبية طريقة مهمة لحل الغالبية العظمى من مسائل الحركة المستوية العامة للأجسام الصلبة. وبما أنه يمكن تحليل الحركة المستوية العامة إلى حركة انسحابية وأخرى دورانية ، فإن سرعة أية نقطة من نقاط الجسم تساوي المجموع الهندسي للسرعتين اللتين تكتسبهما النقطة من الحركة الانسحابية والحركة الدورانية لهذا الجسم.

طرق تعيين السرعة في الحركة المستوية العامة : هناك ثلاث طرق لتحديد السرعة:

الطريقة الاولى : استخدام مفهوم السرعة النسبية :

نتصور جسماً ،كما هو مبين في الشكل(8-9)، قد تحرك حركة انسحابية ثم دار في الوقت نفسه بزاوية حول محور ثابت يمر بنقطة مرجعية ملائمة A ، أي أن الجسم أدى حركة مستوية عامة. نأخذ في هذا الجسم نقطة اختيارية B ثم نرسم الأشعة الآتية : r_A و r_B و $r_{B/A}$. وعندئذ يكون :

$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_{B/A} \qquad (16)$$

الشكل (8-9)

نشتق طرفي العلاقة السابقة بالنسبة للزمن ، فنحصل بعد ملاحظة أن اتجاه الشعاع $r_{B/A}$ سوف يتغير خلال فترة الحركة على العلاقة :

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{B/A} \qquad (17)$$

يبين الشكل(8-10) التمثيل البياني لهذه العلاقة والتي تتضمن السرعات الآتية :

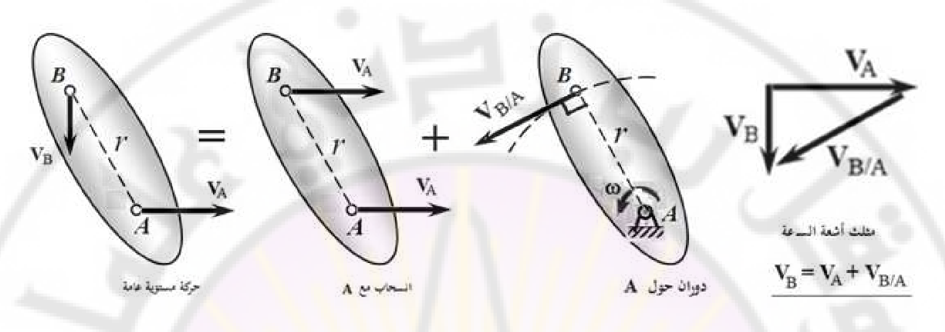
$\mathbf{V}_A$ – السرعة المطلقة للنقطة A أو باختصار سرعة النقطة A .

$\mathbf{V}_B$ – السرعة المطلقة للنقطة B أو باختصار سرعة النقطة B .

$\mathbf{V}_{B/A}$ – السرعة النسبية الدورانية للنقطة B بالنسبة للنقطة A .وتمثل بشعاع حامله يكون عادة عمودياً على شعاع الموضع $r_{B/A}$ ، وجهته توافق جهة السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$ للجسم المفروض. وتتعين قيمة السرعة النسبية بالعلاقة :

$$v_{B/A} = r\omega \qquad (18)$$

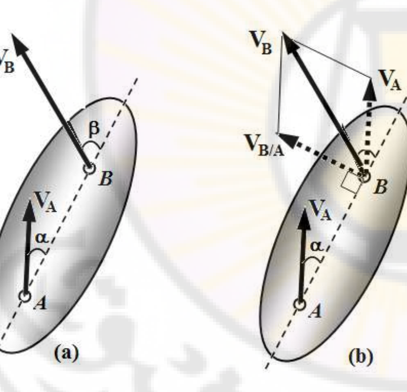
من هنا يتضح أن سرعة النقطة B تتعين بسهولة إذا فرضنا أن الجسم المفروض يتحرك حركة انسحابية بسرعة نقطة أخرى A مأخوذة كقطب (نقطة مرجعية ثابتة) ، وفي الوقت نفسه نتصور أن هذا الجسم سوف يدور حول هذا القطب بسرعة مقدارها ω.



الشكل (8-10)

الطريقة الثانية : استخدام قاعدة المساقط :

قاعدة المساقط : مسقطا سرعتي نقطتين من جسم صلب على المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين متساويان .وللإثبات ، نتأمل الجسم المبين في الشكل (8-11) ثم نفترض أن السرعة $\mathbf{V}_A$ معلومة ، وأن اتجاهي السرعتين $\mathbf{V}_A$ و $\mathbf{V}_B$ معلومان أيضاً . عندئذ وباعتبار النقطة A قطباً يمكن تحديد سرعة النقطة B بالعلاقة :



الشكل (8-11)

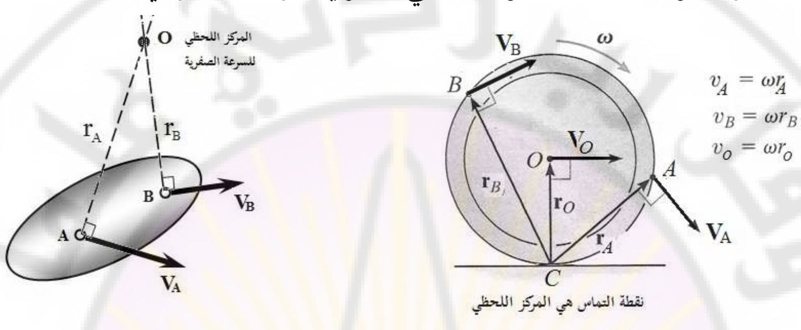
$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{B/A}$$

وبما أن الشعاع $\mathbf{V}_{B/A}$ عمودي على الخط المستقيم المار بالنقطتين A وB ، لذا فإننا نحصل بإسقاط طرفي هذه العلاقة على هذا المستقيم على المعادلة المطلوبة الآتية :

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta \qquad (19)$$

الطريقة الثالثة : استخدام مفهوم المركز اللحظي للسرعة الصفرية :

تعتمد هذه الطريقة في تعيين سرعة نقطة ما من جسم صلب على مفهوم المركز اللحظي للسرعة الصفرية (Instantaneous centre of zero velocity). والمركز اللحظي للسرعة الصفرية هو تلك النقطة الوحيدة التي تساوي سرعتها صفراً في لحظة زمنية معينة.



الشكل (12-8)

وقد يقع المركز اللحظي على الجسم أو لا يقع، وفي حال عدم وقوعه على الجسم يمكن تخيله كأنه واقع على امتداد الجسم .نفرض أنه في لحظة معينة كما هو مبين في الشكل(12-8) كانت لنقطتي الجسم A وB سرعتان هما: $\mathbf{V}_A$ و $\mathbf{V}_B$ على الترتيب ، وعندئذ تكون النقطة O نقطة تقاطع الخط العمودي على الشعاع $\mathbf{V}_A$ والخط العمودي على الشعاع $\mathbf{V}_B$ هي المركز اللحظي للسرعة الصفرية وذلك لأن $\mathbf{V}_O = 0$ وإذا اعتبرنا النقطة O قطباً في لحظة زمنية معينة فإنه ينتج أن سرعة النقطة A تساوي :

$$\boldsymbol{V}_A = \boldsymbol{V}_O + \boldsymbol{V}_{A/O} = \boldsymbol{V}_{A/O} \qquad (20)$$

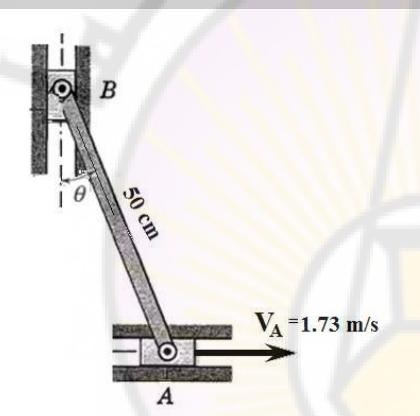
وبالمثل نحصل على نفس النتيجة لأية نقطة أخرى من نقاط الجسم. ولهذا فإن سرعة أية نقطة تساوي السرعة الدورانية لتلك النقطة حول المركز اللحظي للسرعة الصفرية O. وإذا علمنا مقدار سرعة نقطة ما مثل $\mathbf{V}_A$ من جسم صلب ، فإنه يمكن الحصول بسهولة على السرعة الزاوية ω للجسم والسرعة الخطية لكل نقطة من الجسم ،لأنها يجب أن تكون عمودية على الخط الذي يصل هذه النقطة مع المركز اللحظي. وعندئذ يمكن أن نكتب استناداً إلى الشكل ما يلي :

$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B} \qquad (21)$$

وفي حالة تدحرج جسم على سطح ثابت دون انزلاق كما هو مبين في الشكل المذكور آنفاً، فإن لنقطة التلامس C سرعة تساوي صفراً. ولذلك فإن هذه النقطة هي المركز اللحظي للسرعة الصفرية، وتتحدد عندئذ سرعة أية نقطة من الجسم المتدحرج كما هو مبين في الشكل.

مثال رقم (13)

تتحرك الكتلة المنزلقة A أفقياً نحو اليمين بسرعة مقدارها 1.73 m/s كما هو مبين في الشكل المجاور. أوجد سرعة الكتلة المنزلقة B والسرعة الزاوية للذراع AB ، وذلك في اللحظة التي تكون فيها الزاوية بين محور الذراع والمحور الشاقولي $\theta=30°$.



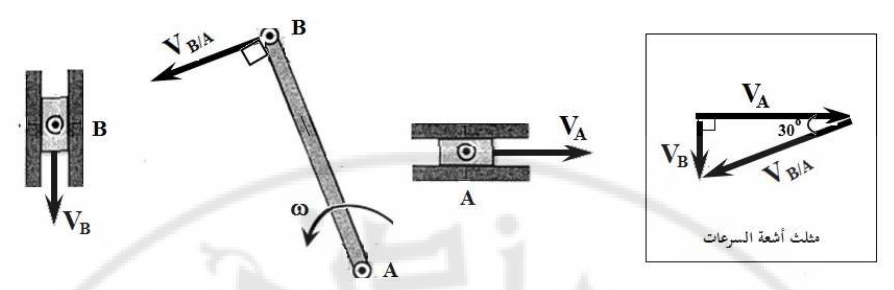
الحل : ....

الطريقة الأولى : : تعتمد هذه الطريقة على اختيار النقطة A كقطب، نجد عندئذ أن :

$$\boldsymbol{V_B} = \boldsymbol{V_A} + \boldsymbol{V_{B/A}}$$

واضح أن حركة كل من الكتلتين المنزلقتين انسحابية وأن حركة الذراع هي حركة مستوية عامة. نحلل الحركة كما هو مبين في الشكل، ثم نرسم مثلث أشعة السرعة واستناداً إلى قاعدة الجيوب في المثلثات نجد :

$$\frac{v_{\mathrm{B}}}{\sin 30} = \frac{v_{\mathrm{A}}}{\sin 60} = \frac{v_{\mathrm{B/A}}}{\sin 90}$$



من هذه العلاقة نحصل على :

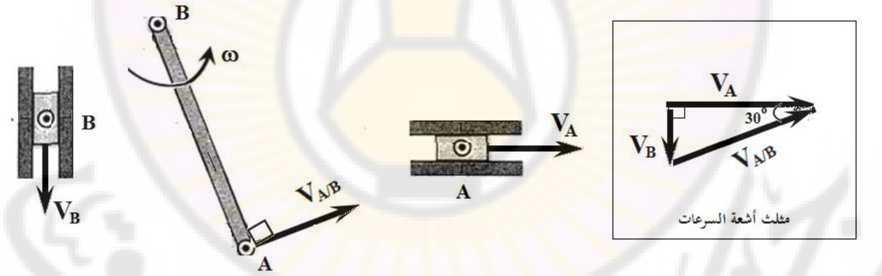
$$v_{\mathrm{B}} = 1\ \mathrm{m/s} \quad ; \quad v_{\mathrm{B/A}} = 2\ \mathrm{m/s}$$

السرعة الزاوية للذراع AB :

$$\omega = \frac{v_{\mathrm{B/A}}}{r_{\mathrm{AB}}} = 4\ \mathrm{rad/s}$$

الطريقة الثانية : تعتمد هذه الطريقة على اختيار النقطة B كقطب، نجد عندئذ أن :

$$\boldsymbol{V}_A = \boldsymbol{V}_B + \boldsymbol{V}_{A/B}$$



نرسم مثلث أشعة السرعة واستناداً إلى قاعدة الجيوب في المثلثات نجد :

$$\frac{v_{\mathrm{A}}}{\sin 60} = \frac{v_{\mathrm{B}}}{\sin 30} = \frac{v_{\mathrm{A/B}}}{\sin 90}$$

من هذه العلاقة نحصل على :

$$v_{\mathrm{B}} = 1\ \mathrm{m/s} \quad ; \ v_{\mathrm{A/B}} = 2\ \mathrm{m/s}$$

السرعة الزاوية للذراع AB :

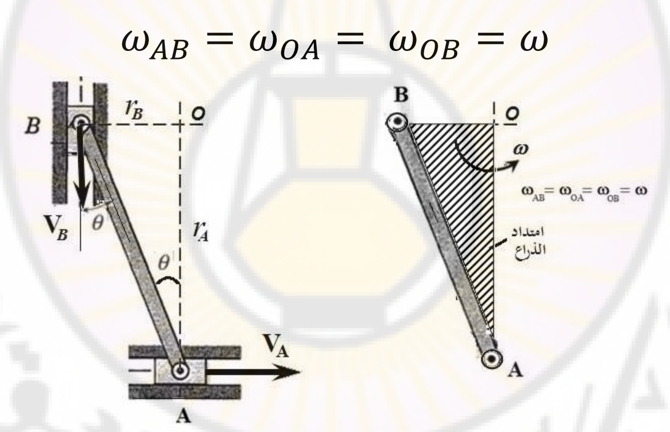
$$\omega = \frac{v_{\mathrm{A/B}}}{r_{\mathrm{AB}}} = 4\ \mathrm{rad/s}$$

بمقارنة نتائج طريقتي الحل نلاحظ النقاط المهمة الآتية :

- إن مثلثي أشعة السرعة في الطريقتين متطابقان .
- السرعتان $\mathbf{V}_{A/B}$ و $\mathbf{V}_{B/A}$ متساويتان في المقدار ومتعاكستان في الجهة .
- لا يتعلق مقدار السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$ للذراع باختيار القطب .

الطريقة الثالثة : تعتمد هذه الطريقة على استخدام مفهوم المركز اللحظي للسرعة الصفرية. ويتحدد المركز اللحظي O برسم عمودين من النقطتين A وB على شعاعي السرعتين $\mathbf{V}_A$ و $\mathbf{V}_B$ كما هو مبين في الشكل.وهنا يجب أن نتصور أن الذراع AB وامتداده (المثلث المهشر) في حالة دوران بنفس السرعة الزاوية حول المركز اللحظي. ولهذا يمكن ان نكتب :

$$\omega_{AB} = \omega_{OA} = \omega_{OB} = \omega$$



ولحساب السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$ والسرعة الخطية $\mathbf{V}_B$ نستخدم العلاقة :

$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B}$$

واستناداً إلى معطيات الشكل ينتج :

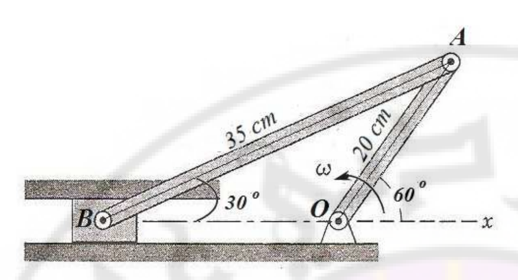
$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{1.73}{0.5\,cos30°} = 4\,rad/s$$

$$v_B = r_B\omega = 0.5\,sin30°(4) = 1\,m/s$$

وهي مماثلة للنتائج التي حصلنا عليها في الطريقتين السابقتين.

مثال رقم (14)

يدور عمود المرفق OA في الآلية المبينة بسرعة زاوية منتظمة تساوي 4rad/s في الاتجاه الموضح في الشكل. احسب للوضع المبين سرعة كل من النقطتين A و B وكذلك السرعة الزاوية لذراع التوصيل AB .



الحل : ....

سرعة النقطة A : بما أن حركة عمود المرفق OA هي حركة دورانية حول النقطة O ، فإن سرعة النقطة A تمثل بشعاع منحاه عمودي على محور العمود وجهته يجب أن تتوافق مع جهة السرعة الزاوية ω_1 المعلومة ، وتحسب قيمة هذه السرعة كما يلي :

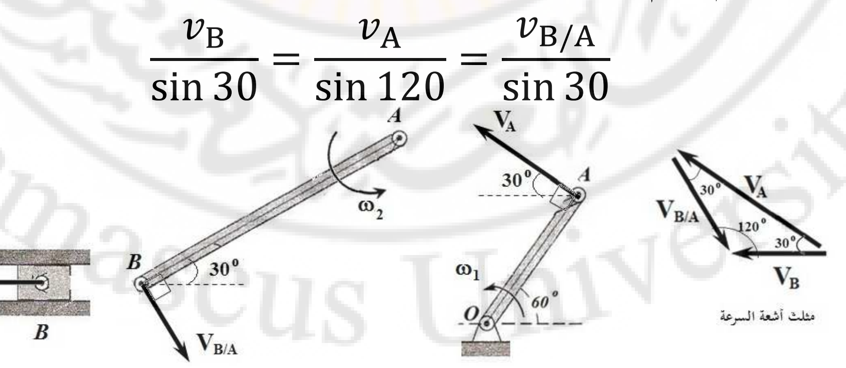
$$v_A = r_1\omega_1 = 20 \times 4 = 80\ cm/s$$

سرعة النقطة B : بما أن حركة عمود الذراع AB هي حركة مستوية عامة ، إذن :

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{B/A}$$

نحلل الحركة ثم نرسم مثلث أشعة السرعة واستناداً إلى قاعدة الجيوب في المثلثات نجد :

$$\frac{v_{\mathrm{B}}}{\sin 30} = \frac{v_{\mathrm{A}}}{\sin 120} = \frac{v_{\mathrm{B/A}}}{\sin 30}$$



من هذه العلاقة نحصل على :

$$v_B = v_{B/A} = v_A \frac{\sin 30}{\sin 120} = 46.19 \text{ cm/s}$$

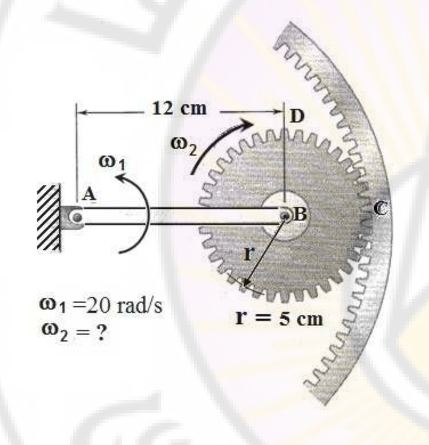
السرعة الزاوية لذراع التوصيل : تتعين السرعة الزاوية للذراع AB كما يلي :

$$\omega_2 = \frac{v_{B/A}}{r_2} = \frac{46.19}{35} = 1.32 \text{ rad/s}$$

إن جهة السرعة الزاوية للذراع AB هي عكس دوران عقارب الساعة وذلك بالاستناد إلى جهة السرعة النسبية $\mathbf{V}_{B/A}$ والتي تمّ استنتاجها من مثلث أشعة السرعة.

مثال رقم (15)

يتدحرج مسنن دائري مركزه B دون انزلاق على مسنن آخر ثابت بفعل حركة الذراع AB الذي يدور في اللحظة المبينة بسرعة زاوية مقدارها 20rad/s وفق الاتجاه المبين في الشكل . المطلوب :



1. سرعة النقطة B مركز المسنن .
2. السرعة الزاوية للمسنن .
3. سرعة النقطة D الواقعة على محيط المسنن.

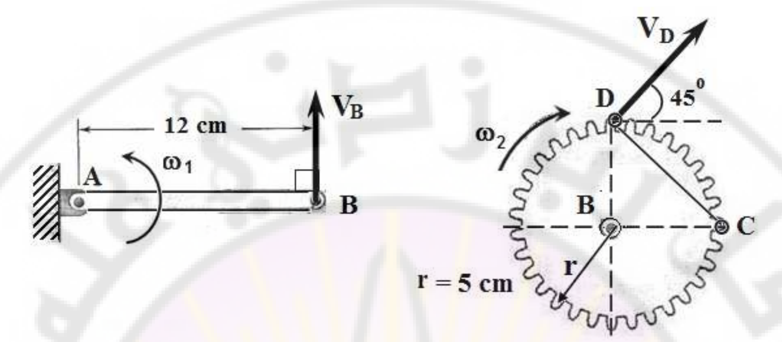
الحل : ....

سرعة النقطة B : بما أن حركة عمود المرفق AB هي حركة دورانية حول النقطة A ، فإن سرعة النقطة B تمثل بشعاع منحاه عمودي على محور العمود وجهته يجب أن تتوافق مع جهة السرعة الزاوية ω_1 المعلومة ، وتحسب قيمة هذه السرعة كما يلي :

$$v_B = r_1 \omega_1 = 0.12 \times 20 = 2.4 \; m/s$$

السرعة الزاوية للمسنن: بما أن حركة المسنن هي حركة تدحرجيه فإن السرعة الزاوية ω_2 للمسنن تحسب باستخدام العلاقة الآتية :

$$v_B = r_2\omega_2 \Longrightarrow \omega_2 = \frac{v_B}{r_2} = \frac{2.4}{0.05} = 48\, rad/s$$

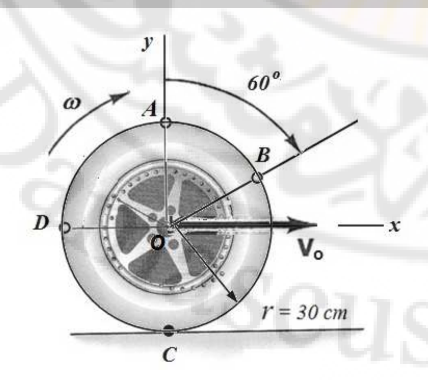


سرعة النقطة D : بما أن حركة المسنن تدحرجيه ، وبملاحظة أن نقطة التعشيق C هي المركز اللحظي للدوران كما هو مبين في الشكل، إذن تمثل سرعة النقطة D بشعاع عمودي على الخط CD وجهته يجب أن تتوافق مع جهة السرعة الزاوية ω_2 . وتحسب قيمة هذه السرعة كما يلي:

$$v_D = CD \times \omega_2 = \frac{0.05}{\cos 45°} \times 48 = 3.39\, m/s$$

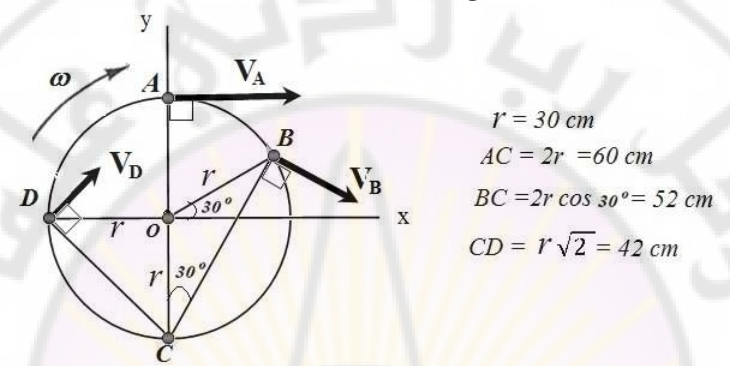
مثال رقم (16)

تتدحرج عجلة سيارة بدون انزلاق نحو اليمين كما هو مبين في الشكل. إذا علمت أن السيارة تسير بسرعة ثابتة مقدارها 15 m/s فأوجد باستخدام مفهوم المركز اللحظي للسرعة الصفرية للعجلة سرعة النقطةA، والنقطة B ، والنقطة D .



الحل : ....

إن النقطة C تمثل المركز الآني للسرعة الصفرية طالما أن العجلة لا تنزلق . بناء على ذلك يكون اتجاه شعاع السرعة لأية نقطة على العجلة عمودياً على الخط الذي يصل هذه النقطة مع النقطة C ، ومطابقاً من جهة أخرى لاتجاه السرعة الزاوية للعجلة .



وتحسب السرعة الزاوية **ω** للعجلة انطلاقاً من سرعة مركز العجلة $\mathbf{V_O}$ والتي تساوي بدورها سرعة حركة السيارة وذلك لأن حركة السيارة هي في الواقع حركة انسحابية وهذا يعني أن جميع مراكز عجلاتها سوف تندفع بنفس السرعة .أي أن :

$$v_O = r\omega \implies \omega = \frac{v_O}{r} = \frac{15}{0.3} = 50\, rad/s$$

سرعة النقطة A : إن طول الخط الذي يصل هذه النقطة مع المركز الآني C يساوي قطر العجلة وقدره 60 cm ، ولذلك فإن سرعة النقطة A تساوي :

$$v_A = AC \times \omega = 0.60 \times 50 = 30\, m/s$$

سرعة النقطة B : إن طول الخط الذي يصل هذه النقطة مع المركز الآني C يتعين إما من علاقة الجيوب أو مباشرة. وتحسب قيمة سرعة النقطة B كما يلي :

$$v_B = BC \times \omega = 0.52 \times 50 = 26\, m/s$$

سرعة النقطة D : إن طول الخط الذي يصل هذه النقطة مع المركز الآني C يتعين من علاقة المثلث القائم كما هو واضح في الشكل. وتحسب قيمة سرعة النقطة D كما يلي :

$$v_D = CD \times \omega = 0.42 \times 50 = 21\, m/s$$

تعيين التسارع في الحركة المستوية العامة :

إن تسارع أية نقطة من نقاط الجسم الذي يتحرك حركة مستوية يساوي المجموع الهندسي للتسارعين اللذين تكتسبهما النقطة من الحركة الانسحابية والحركة الدورانية كما هو مبين في الشكل (8-13). ومن أجل الحصول على علاقة التسارع نشتق علاقة السرعة النسبية بالنسبة للزمن فنحصل على المعادلة الآتية :

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{B/A} \qquad (22)$$

$\boldsymbol{a}_A$ – تسارع النقطة A . $\boldsymbol{a}_B$ – تسارع النقطة B .

$\boldsymbol{a}_{B/A}$ – تسارع النقطة B بالنسبة للنقطة A . في هذه الحالة نتخيل أن النقطة B تتحرك على مسار دائري نصف قطره r ، يساوي طول الخط الواصل بين النقطتين A وB .

ولهذا يمكن التعبير عن التسارع النسبي $\boldsymbol{a}_{B/A}$ بمركبتين إحداهما ناظمية $(\boldsymbol{a}_{B/A})_n$ والأخرى مماسية $(\boldsymbol{a}_{B/A})_t$ ، فتصبح العلاقة الأخيرة كما يلي :

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + (\boldsymbol{a}_{B/A})_n + (\boldsymbol{a}_{B/A})_t \qquad (23)$$

الشكل (8–13)

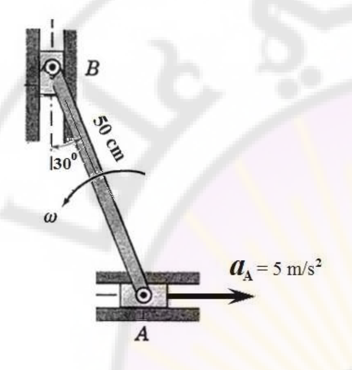
وتتحدد مركبتا التسارع النسبي كما يلي :

$$(\boldsymbol{a}_{B/A})_n = r\omega^2 \quad ; \quad (\boldsymbol{a}_{B/A})_t = r\alpha \qquad (24)$$

تمثل ω السرعة الزاوية وتمثل α التسارع الزاوي للجسم .ومن الضروري ملاحظة أن التسارع الناظمي يمثل التبدل في اتجاه السرعة $\mathbf{V}_{B/A}$ ، ويتجه نحو مركز الدوران، أي من النقطة B الى النقطة A . أما التسارع المماسي فيمثل التبدل في مقدار السرعة النسبية

$V_{B/A}$ ، ويكون اتجاهه عمودياً على الخط AB . وهكذا نجد أن تسارع النقطة المختارة B يساوي المجموع الهندسي لتسارعين : الأول هو تسارع نقطة أخرى من الجسم مأخوذة كقطب ، والثاني هو تسارع النقطة B عند دورانها مع الجسم حول ذلك

مثال رقم (17)



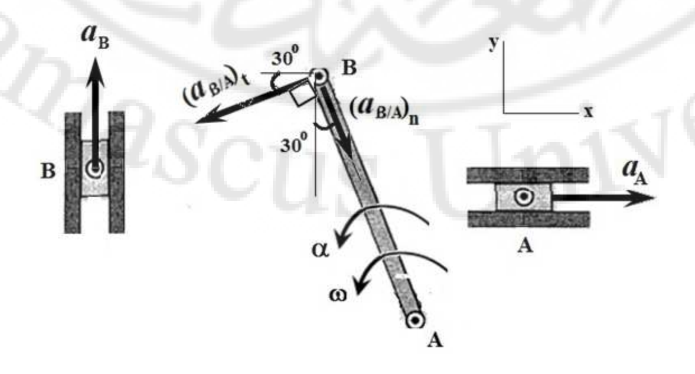
تُعطى الكتلة المنزلقة A تسارعاً مقداره $5\ m/s^2$ كما هو مبين في الشكل المجاور .أوجد تسارع الكتلة المنزلقة B ، والتسارع الزاوي للذراع AB في الوضع المبين . مع العلم أن السرعة الزاوية للذراع تساوي 4 rad/s وجهتها بعكس دوران عقارب الساعة.

الحل : ....

بما أن حركة الذراع مستوية عامة إذن يمكن تعيين تسارع النقطة B بالجمع الشعاعي لتسارع النقطة A المتخذة كقطب مع التسارع النسبي للنقطة B بالنسبة للنقطة A:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{B/A}$$

في هذه الحالة يكون اتجاه التسارع $\boldsymbol{a_B}$ شاقولياً وسنفرض جهته للأعلى ، أما التسارع النسبي $\boldsymbol{a}_{B/A}$ فيتكون من مركبتين إحداهما ناظمية $(\boldsymbol{a}_{B/A})_n$ تتجه نحو القطبA ، والأخرى مماسية $(\boldsymbol{a}_{B/A})_t$ منحاها عمودي على الذراع AB وجهتها يجب أن توافق الجهة المفروضة للتسارع الزاوي $\boldsymbol{\alpha}$ المجهول أيضاً. عندئذ تأخذ معادلة التسارعات الصيغة الآتية:



$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + (\boldsymbol{a}_{B/A})_n + (\boldsymbol{a}_{B/A})_t$$

حيث :

$$(\boldsymbol{a}_{B/A})_n = r\omega^2 = 0.5(4)^2 = 8\ m/s^2$$

$$(\boldsymbol{a}_{B/A})_t = r\alpha = 0.5(\alpha)$$

نختار جملة إحداثيات مناسبة كما هو مبين في الشكل ثم نقوم بإسقاط علاقة التسارعات الأخيرة على المحور الأفقي x ثم على المحور الشاقولي y فنحصل بعد التعويض بالمعطيات على الآتي :

$$0 = 5 - 0.5(\alpha)cos\ 30° + 8\ cos\ 60°$$

$$a_B = 0.5(\alpha)sin\ 30° + 8\ sin\ 60°$$

ينتج بالحل :

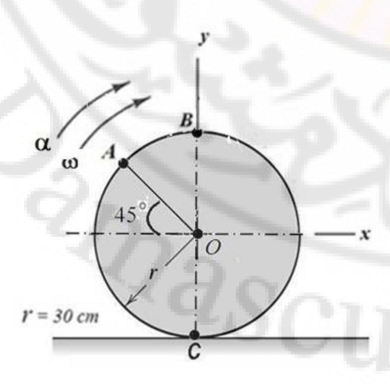
$$\alpha = 10.39\ rad/s^2$$

$$a_B = -12.1\ m/s^2$$

تدل الإشارة السالبة للتسارع $\boldsymbol{a}_B$ أن الجهة الفعلية لشعاع التسارع هي للأسفل .

مثال رقم (18)

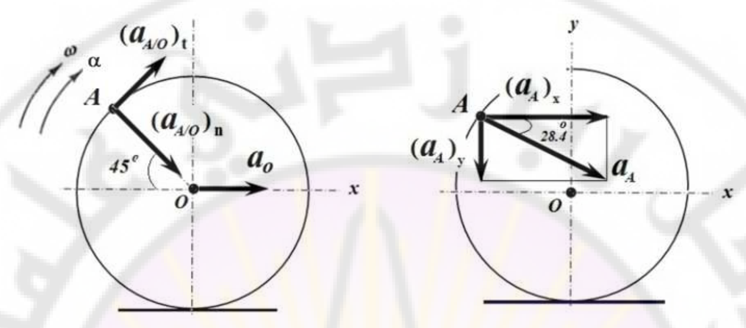
تتدحرج عجلة نصف قطرها 30 cm بدون انزلاق كما هو مبين في الشكل. إذا اندفعت العجلة بسرعة زاوية تساوي 10 rad/s وبتسارع زاوي يساوي $20\ rad/s^2$ وكلاهما مع عقارب الساعة، فأوجد عندئذ تسارع مركز العجلة O وتسارع النقطة A.



الحل : ....

تسارع النقطة O : إن اتجاه تسارع مركز العجلة يجب أن يكون كما هو واضح في الشكل أفقيا طالما أن العجلة تتدحرج على مستو أفقي .وتحسب قيمته بالعلاقة الآتية :

$$a_O = r\alpha = 0.3 \times 20 = 6\, m/s^2$$



تسارع النقطة A : إن تسارع النقطة A يتحدد بالجمع الشعاعي لتسارع النقطة O مع التسارع النسبي للنقطة A بالنسبة للنقطة O المتخذة مركزاً للدوران وذلك كما يلي :

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{A/O}$$

حيث يتكون التسارع النسبي $\boldsymbol{a}_{A/O}$ من مركبتين إحداهما ناظمية $(\boldsymbol{a}_{A/O})_n$ تتجه نحو القطب O والأخرى مماسية $(\boldsymbol{a}_{A/O})_t$ منحاها عمودي على الخط OA وجهتها يجب أن توافق اتجاه التسارع الزاوي $\boldsymbol{\alpha}$. عندئذ تأخذ معادلة التسارع الصيغة الآتية :

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_O + (\boldsymbol{a}_{A/O})_n + (\boldsymbol{a}_{A/O})_t$$

$$(\boldsymbol{a}_{A/O})_n = r\omega^2 = 0.3(10)^2 = 30\, m/s^2$$

$$(\boldsymbol{a}_{A/O})_t = r\alpha = 0.3(20) = 6\, m/s^2$$

نقوم بإسقاط علاقة التسارع على المحور الأفقي x ثم على المحور الشاقولي y فنحصل بعد التعويض على الآتي :

$$(\boldsymbol{a}_A)_x = 6 + 30(cos45°) + 6(cos45°) = 31.45 m/s^2$$

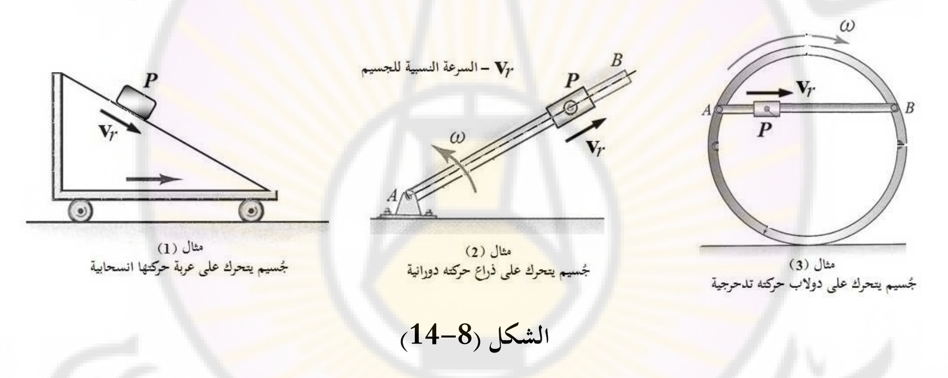
$$(\boldsymbol{a}_A)_y = -30(sin45°) + 6(sin45°) = -16.97 m/s^2$$

$$\boldsymbol{a}_A = \sqrt{31.45^2 + 16.97^2} = 35.74\, m/s^2$$

4–8 الحركة المركبة للجسيمات (Compound motion of Particles) :

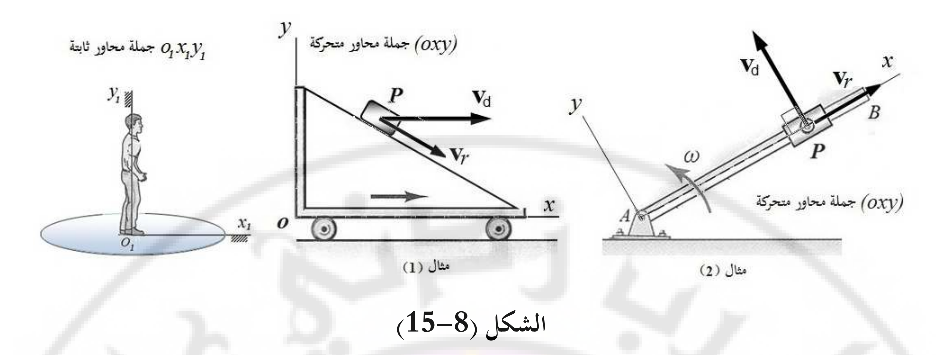
تمهيد :

الحركة المركبة لجسيم هي في الواقع حركة جسيم (Particle) بالنسبة إلى جسم صلب (Rigid body) يتحرك حركة انسحابية أو دورانية أو مستوية عامة . يبيّن الشكل (8–14) الحركة المركبة للجسيم P في حالات الحركة الثلاث المذكورة للجسم الصلب . ففي المثال رقم(1) تتحرك الكتلة P بالنسبة لعربة حركتها انسحابية ،وفي المثال رقم (2) تتحرك الحلقة P بالنسبة لذراع حركته دورانية ، وفي المثال رقم (3) تتحرك الحلقة P بالنسبة لدولاب حركته تدحرجية (مستوية عامة) .



الشكل (8–14)

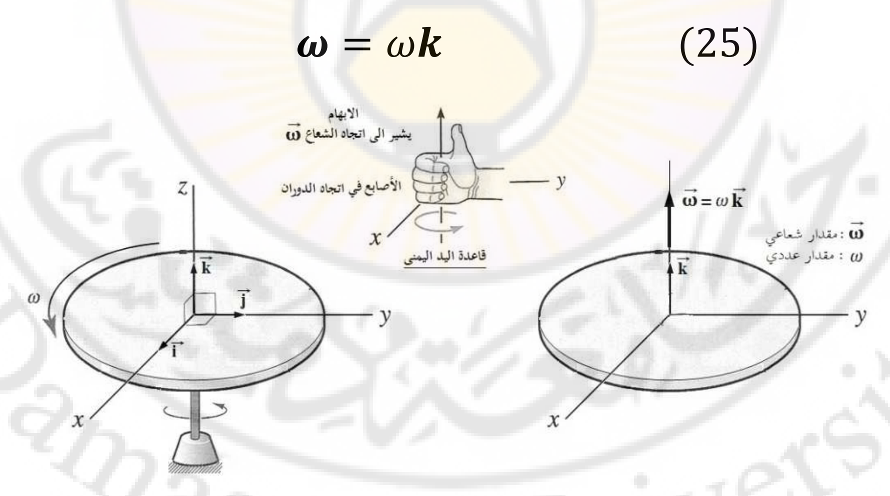
ولدراسة هذا النوع من الحركة المعقدة من الضروري استخدام جملة إحداثيات متحركة (oxy) تتحرك مع الجسم الصلب وذلك من أجل تحليل الحركة إلى حركتين بسيطتين : تدعى الأولى بالحركة النسبية (Relative motion) والثانية تدعى بالحركة المكتسبة (Acquired motion). وبناء على ذلك فإن السرعة المطلقة للجسيم بالنسبة لجملة محاور ثابتة ($o_1x_1y_1$) مختارة كما هو مبين في الشكل(8–15) تساوي إلى المجموع الشعاعي للسرعتين النسبية ($\mathbf{V}_r$) والمكتسبة ($\mathbf{V}_d$) . وهنا تتحدد السرعة النسبية للجسيم على امتداد مسار حركته بسهولة، إذا تصورنا أن الجسم الصلب قد توقف عن الحركة مؤقتاً في اللحظة المدروسة .وبالمقابل ، تتعين السرعة التي يكتسبها الجسيم من الجسم الصلب، إذا تصورنا أن الجسيم قد توقف عن الحركة مؤقتاً في اللحظة المدروسة.



الشكل (8–15)

إن دراسة الحركة المركبة للجسيمات والأجسام الصلبة بطريقة الأشعة ذات أهمية كبيرة. وبهذا الصدد يمكن التعبير عن السرعة الزاوية ω لجسم ما ،كالقرص المبين في الشكل(8–16)،بالشعاع **ω** العمودي على مستوي الدوران ، والذي يتحدد اتجاهه بتطبيق قاعدة اليد اليمنى . في هذه الحالة يجب ثني أصابع اليد اليمنى في اتجاه دوران الجسم كما هو مبين في الشكل ، فيشير عندئذ الإبهام إلى اتجاه شعاع السرعة الزاويّة **ω**.وبناء على ما سبق نكتب الصيغة الشعاعية للسرعة الزاوية بدلالة شعاع الواحدة $\boldsymbol{k}$ على النحو الآتي :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k} \qquad (25)$$

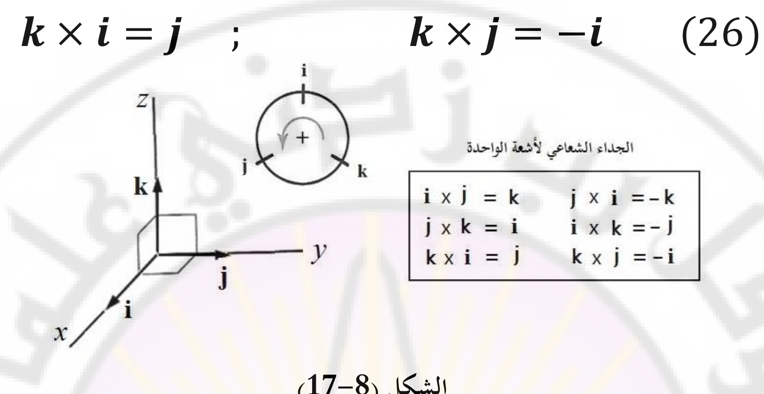


الشكل (8–16)

ولدراسة الحركة المركبة ينبغي ، كما سنرى فيما بعد ، معرفة الجداء الشعاعي لأي شعاعين من أشعة الواحدة الديكارتية **(i,j,k)** .يبين الشكل(8–17) أن الجداء

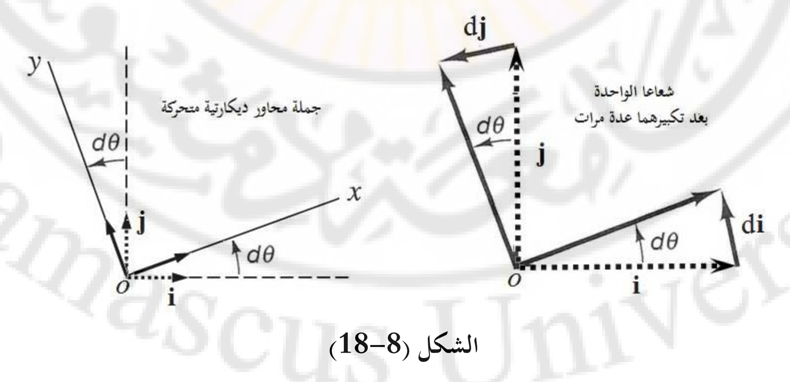
الشعاعي لأي شعاعين يكون موجباً إذا كانا متتاليين بعكس دوران عقارب الساعة ، ويكون سالباً إذا كانا متتاليين مع عقارب الساعة.وعلى سبيل المثال يمكن أن نكتب :

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \quad ; \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} \qquad (26)$$



الشكل (8-17)

ولدراسة الحركة المركبة ينبغي أيضاً ، كما سبق القول ، استخدام جملة محاور ديكارتية متحركة مع الجسم المفروض .ونتيجة لذلك فان اتجاهات أشعة الواحدة تتغير مع الزمن في أثناء حركة الجسم ، ولهذا فان المشتق الزمني لكل منها لا يكون مساوياً للصفر . أما طريقة استنتاج المشتق الزمني لشعاع الواحدة فتعتمد على دراسة التغير الذي يطرأ على ذلك الشعاع عند دوران جملة المحاور الإحداثية بزاوية صغيرة جدا قدرها $d\theta$ كما هو موضح في الشكل(8-18).



الشكل (8-18)

نرسم من نقطة اختيارية أشعة الواحدة فنحصل عندئذ على الشعاعين **di** و**dj** .وبما أن مقدار شعاع الواحدة يبقى ثابتاً ويساوي إلى الواحد عندئذ يمكن أن نكتب جبرياً ما يلي:

$$di = id\theta = (1)d\theta \quad ; \qquad dj = jd\theta = (1)d\theta$$

وبالانتقال إلى الصيغة الشعاعية ، نعبر عن الشعاع **di** بدلالة الشعاع **j** لأنه يوازيه والشعاع **dj** بدلالة الشعاع **i** لأنه يوازيه أيضاً ولكن يخالفه في الاتجاه، وبعد تقسيم طرفي كل معادلة على dt ينتج أن :

$$d\boldsymbol{i} = d\theta\, \boldsymbol{j} \quad ; \qquad d\boldsymbol{j} = -d\theta\, \boldsymbol{i}$$

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{j} \quad ; \qquad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{i}$$

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \omega\, \boldsymbol{j} \quad ; \qquad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = -\omega\, \boldsymbol{i}$$

وبالاستفادة من علاقات الجداء الشعاعي لأشعة الواحدة نجد :

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \omega\,(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}) \quad ; \qquad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \omega\,(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j})$$

عندئذ نحصل على الآتي :

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i} \quad ; \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}) \qquad (27)$$

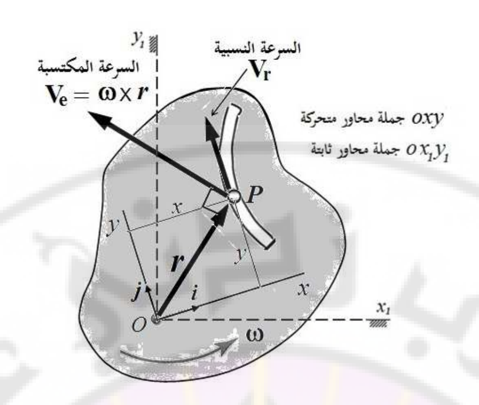
ولهذه النتيجة أهمية خاصة كما سنرى لاحقاً .

علاقة السرعة في الحركة المركبة :

لاستنتاج المعادلة العامة للسرعة في الحركة المركبة نتصور جسيماً $\boldsymbol{P}$ يتحرك حركة خطية منحنية على امتداد مجرى يقع داخل جسم صلب. وبفرض أن هذا الجسم يدور بسرعة زاوية **ω** حول محور ثابت يمر من النقطة O كما هو مبين في الشكل(8-19) . فإذا تحرك الجسيم $\boldsymbol{P}$ حركة خطية على امتداد مساره فإن شعاع موضعه بالنسبة للمحاور المتحركة المختارة (x,y) يتحدد بالعلاقة :

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن نحصل على السرعة الكلية للجسيم كما يلي :



الشكل (8– 19)

$$\mathbf{V}_{\mathrm{p}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$$

$$\mathbf{V}_{\mathrm{p}} = \left(\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}\right) + \left(x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\right)$$

ومع ملاحظة أن المشتق الزمني لكل من شعاعي الواحدة في الجملة المتحركة المختارة هو:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i} \quad , \qquad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}$$

وبالتعويض نجد :

$$\mathbf{V}_{\mathrm{p}} = \left(\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}\right) + \boldsymbol{\omega} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$$

$$\mathbf{V}_{\mathrm{p}} = \left(\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}\right) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

يمثل القوس الأول من هذه العلاقة سرعة الجسيم على امتداد مساره الخطي بالنسبة للجسم الصلب ، وتدعى بالسرعة النسبية ويرمز لها $\mathbf{V_r}$ ، بينما يمثل القوس الثاني السرعة التي يكتسبها الجسيم بسبب ارتباطه الوثيق بالجسم الصلب المتحرك ،لذا تدعى بالسرعة المكتسبة ويرمز لها $\mathbf{V_d}$.إذن:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{r}} = \left(\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}\right) \quad ; \quad \mathbf{V}_{\mathrm{d}} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

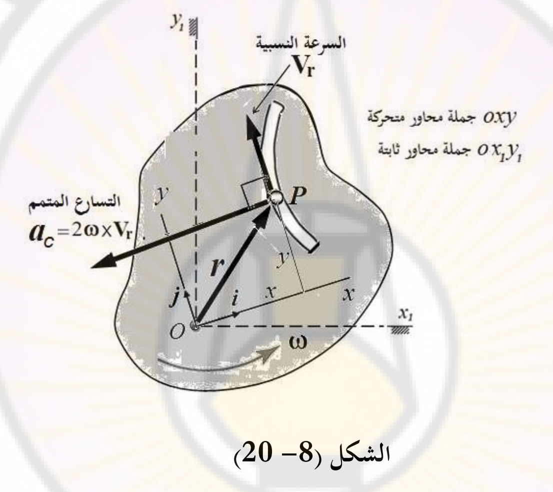
عندئذ تصبح علاقة السرعة على النحو الآتي :

$$\mathbf{V}_\mathrm{p} = \mathbf{V}_\mathrm{r} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \mathbf{V}_\mathrm{r} + \mathbf{V}_\mathrm{d} \qquad (28)$$

يوضح الشكل كيفية التمثيل البياني للسرعتين النسبية والمكتسبة في الحركة المركبة .

علاقة التسارع في الحركة المركبة :

لاستنتاج المعادلة العامة للتسارع في الحركة المركبة نفرض أن الجسم الصلب يدور بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega}$ وبتسارع زاوي مقداره $\boldsymbol{\alpha}$ كما هو مبين في الشكل(8-20) .



الشكل (8– 20)

فإذا تحرك الجسيم $\boldsymbol{P}$ حركة خطية على امتداد مساره فإن موضعه وسرعته بالنسبة للمحاور المتحركة المختارة (x,y) يتحددان بالعلاقتين الآتيتين:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \quad ; \quad \mathbf{V}_\mathrm{r} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}$$

وباشتقاق هاتين العلاقتين ينتج لدينا :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = \mathbf{V}_\mathrm{r} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

$$\frac{d\mathbf{V}_\mathrm{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_\mathrm{r})$$

وللحصول على معادلة التسارع الكلي للجسيم $\boldsymbol{P}$ في أثناء حركته المركبة نقوم باشتقاق معادلة السرعة الآتية :

$$\mathbf{V}_{\mathrm{p}} = \mathbf{V}_{\mathrm{r}} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

وينتج عندئذ ما يلي :

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{p}} = \frac{d\mathbf{V}_{\mathrm{p}}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_{r}}{dt} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{p}} = \frac{d\mathbf{V}_{r}}{dt} + (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$$

بالتعويض وترتيب الحدود نحصل على :

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{r}$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة المهمة على النحو الآتي :

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + (\boldsymbol{a}_{d})_{t} + (\boldsymbol{a}_{d})_{n} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}$$

أو بشكل ابسط :

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{d}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{c}} \qquad (29)$$

حيث :

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ – التسارع النسبي الذي يقيس التغير في السرعة النسبية خلال الحركة النسبية للجسيم.

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{d}}$ – التسارع المكتسب الذي يقيس التغير في السرعة المكتسبة خلال الحركة المكتسبة. ويتألف من مركبتين إحداهما مماسية $(\boldsymbol{a}_{\mathrm{d}})_{\mathrm{t}}$ والأخرى ناظمية $(\boldsymbol{a}_{\mathrm{d}})_{\mathrm{n}}$.

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}$ – التسارع المتمِّم (complementary acceleration) لحركة الجسيم . وكان العالم الفرنسي كوريوليس (Coriolis) هو أول من أشار إلى هذا التسارع . ويقيس هذا التسارع التغير في السرعة النسبية خلال الحركة المكتسبة وتغير السرعة المكتسبة خلال الحركة النسبية. ويتحدد بالعلاقة الآتية :

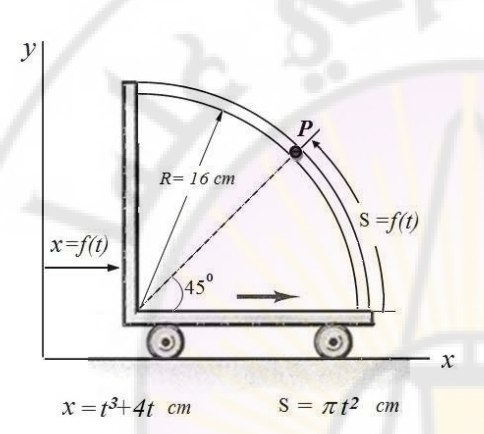
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{r} \qquad (30)$$

وطالما أن شعاع السرعة الزاوية عمودي على مستوي الحركة الذي يقع فيه شعاع السرعة النسبية ، لذا فإن الشعاعين متعامدان ، ونتيجة لذلك فإن مقدار التسارع المتمِّم يعطى بالعلاقة الجبرية الآتية:

$$a_{\mathrm{c}} = 2\omega \times \mathrm{V}_{r} \times \sin 90° = 2\omega \times \mathrm{V}_{r} \qquad (31)$$

ونحصل على اتجاه هذا التسارع بتدوير شعاع السرعة النسبية $\mathbf{V}_r$ بمقدار $90°$ وفق اتجاه السرعة الزاوية المكتسبة كما هو مبين في الشكل المذكور آنفاً. ومن ناحية أخرى ينعدم التسارع المتمِّم عند الحركة الانسحابية المكتسبة لأن $\omega = 0$.

مثال رقم (19)



يبين الشكل المجاور جُسيماً $\boldsymbol{P}$ يتحرك حركة خطية منحنية باتجاه الأعلى ، وذلك بالنسبة إلى عربة تتحرك نحو اليمين حركة انسحابية . أوجد سرعة وتسارع هذا الجسيم بعد مرور ثانيتين على بدء الحركة ، إذا علمت أن الجسيم يتحرك تبعاً للقانون: $S=\pi t^2$. وأن العربة تتحرك تبعاً للقانون: $x=t^3+4t$. حيث يقدر الزمن بوحدة الثانية والموضع بالسنتيمتر.

الحل : ....

سرعة الجسيم $\boldsymbol{P}$: بما أن حركة الجسيم P هي حركة مركبة ، إذن تتحدد سرعته الكلية بالجمع الشعاعي لسرعته النسبية المنحنية مع سرعته المكتسبة الانسحابية وذلك كما يلي:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_d$$

حيث :

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 2\pi t = 2\pi \times 2 = 12.6\ cm/s$$

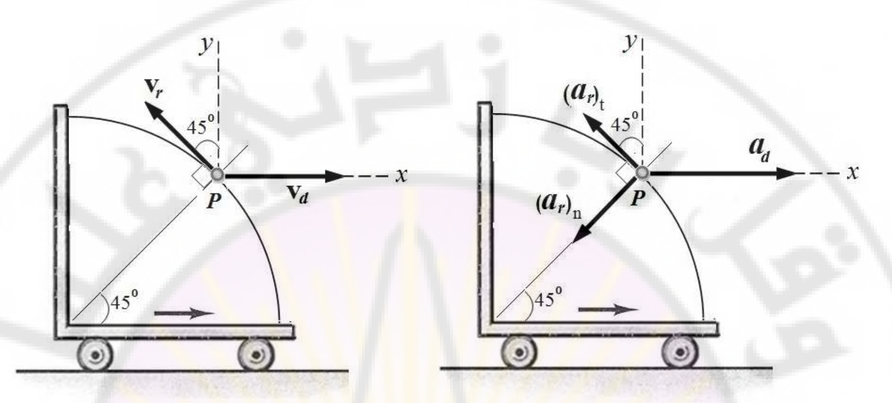
$$v_d = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 4 = 3 \times 2^2 + 4 = 16\ cm/s$$

نرسم بيانيا هاتين السرعتين كما هو مبين في الشكل ، ثم نقوم بإسقاط العلاقة الشعاعية للسرعة على المحورين (x,y) فنحصل على السرعة المطلوبة كما يلي :

$$v_x = -v_r \cos 45° + v_d = 7.1\ \ cm/s$$

$$v_y = v_r \cos 45° = 8.9 \ \ cm/s$$

$$v_P = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 11.39 \ cm/s$$



تسارع الجسيم P : بما أن حركة العربة انسحابية ، إذن التسارع المتمم يكون معدوماً وتصبح معادلة التسارع على النحو الآتي:

$$\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_d$$

$$\boldsymbol{a}_p = (\boldsymbol{a}_r)_t + (\boldsymbol{a}_r)_n + \boldsymbol{a}_d$$

نرسم أشعة هذه التسارعات كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب القيم الآتية :

$$(a_r)_t = \frac{dv_r}{dt} = 2\pi = 6.3 \ cm/s^2$$

$$(a_r)_n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{(12.6)^2}{16} = 9.92 \ cm/s^2$$

$$a_d = \frac{dv_d}{dt} = 6t = 6 \times 2 = 12 \ \ cm/s^2$$

نقوم بإسقاط العلاقة الشعاعية للتسارعات على المحورين (x,y) فينتج لدينا :

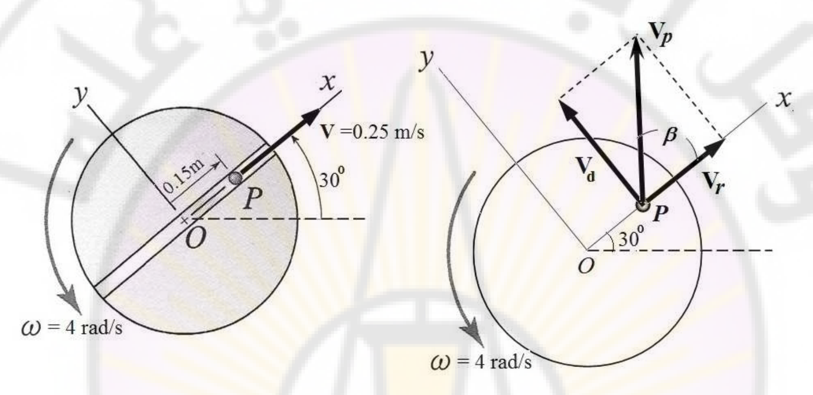
$$a_x = 12 - (6.3 - 9.92) \cos 45° \quad = 0.53 \ \ cm/s^2$$

$$a_y = 6.3 \sin 45° - 9.9 \sin 45° = -2.56 \ \ cm/s^2$$

$$a_P = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = 2.61 \ cm/s^2$$

مثال رقم (20)

يتحرك الجسيم P داخل مجرى محفور في قرص دائري بسرعة خطية مستقيمة قدرها 0.25m/s كما هو مبين في الشكل. إذا كان هذا القرص يدور بعكس دوران عقارب الساعة وبسرعة بزاوية تساوي 4rad/s، فأوجد عندئذ السرعة المطلقة للجسيم P في الوضع المبين في الشكل.



الحل : ....

بما أن حركة الجسيم P هي حركة مركبة ، إذن تتحدد سرعته الكلية بالجمع الشعاعي لسرعته النسبية المستقيمة مع سرعته المكتسبة الدورانية وذلك كما يلي :

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_d$$

حيث :

$$v_r = 0.25\, m/s$$
$$v_d = r\omega = 0.15 \times 4 = 0.6\, m/s$$

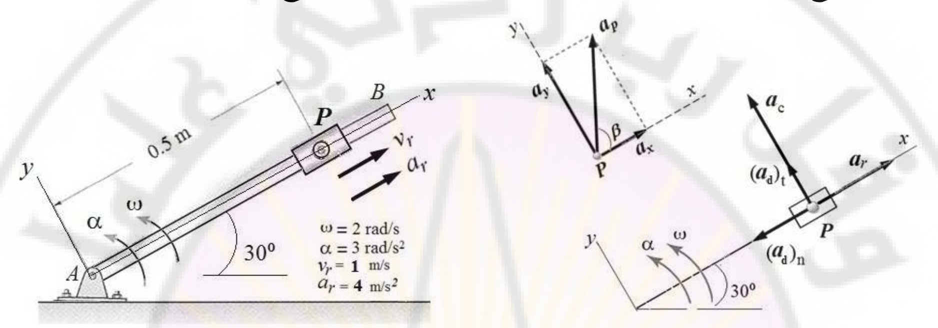
إن اتجاه السرعة المكتسبة عمودي على الخط OP وجهتها يجب أن توافق اتجاه السرعة الزاوية للقرص . يبين الشكل التمثيل البياني للسرعات المذكورة ، وبناء على ذلك نجد :

$$v_P = \sqrt{{v_r}^2 + {v_d}^2} = \sqrt{O.25^2 + 0.6^2} = 0.65\, m/s$$

$$\tan\beta = \frac{v_d}{v_r} = 2.4 \quad \Rightarrow \quad \beta = 67.4^{\circ}$$

مثال رقم (21)

يدور الذراع AB بعكس دوران عقارب الساعة. وتتحرك الحلقة $\boldsymbol{P}$ على امتداد هذا الذراع اعتباراً من النقطة A حيث قطعت مسافة مقدارها $x = 0.5$ m بسرعة 1.5 m/s وتسارع $4\ m/s^2$ كما هو مبين في الشكل .أوجد تسارع الحلقة $\boldsymbol{P}$.



الحل : ....

بما أن حركة الحلقة P هي حركة مركبة ، إذن يتحدد تسارعها الكلي بالجمع الشعاعي للتسارعات الآتية : النسبي $\boldsymbol{a}_r$ والمكتسب $\boldsymbol{a}_d$ (المماسي والناظمي) والمتمِّم $\boldsymbol{a}_c$:

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_r + (\boldsymbol{a}_d)_t + (\boldsymbol{a}_d)_n + \boldsymbol{a}_c$$

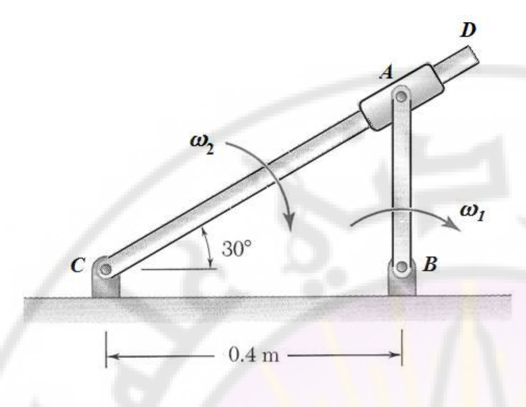
نحسب القيم الآتية :

$$(a_d)_t = r\alpha = 0.5 \times 3 = 1.5\, m/s^2$$
$$(a_d)_n = r\omega^2 = 0.5 \times (2)^2 = 2\, m/s^2$$
$$a_c = 2\omega v_r = 2 \times 2 \times 1 = 4\, m/s^2$$

نرسم أشعة هذه التسارعات كما هو مبين في الشكل ، ثم نقوم بإسقاط العلاقة الشعاعية للتسارعات على المحورين (x,y) فنحصل بعد التعويض على التسارع المطلوب:

$$a_x = 4 - 2 = 2\ \ m/s^2$$
$$a_y = 4 + 1.5 = 5.5\ \ m/s^2$$
$$a_P = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{2^2 + 5.5^2}\ = 5.85\, m/s^2$$
$$\tan\beta = \frac{a_y}{a_x} = 2.75 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 70^\circ$$

مثال رقم (22)



يدور الذراع AB في اتجاه دوران عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة مقدارها $\omega_1 = 6$ rad/s مما يؤدي إلى تدوير الذراع CD من خلال الحلقة المنزلقة A . إذا علمت أن الحلقة مثبتة تثبيتاً مفصلياً بالذراع AB فأوجد ما يلي :

1. سرعة وتسارع الحلقة A . 2. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للذراع CD .

الحل : ....

سرعة وتسارع الحلقة A : بما أن الحلقة مثبتة تثبيتاً مفصلياً بالذراع AB ، إذن يمكن أن نكتب بعد ملاحظة أن السرعة الزاوية للذراع AB ثابتة ما يلي :

$$v_A = r\omega = AB \times \omega_1 = 0.4 \tan 30° \times 6 = 1.38\, m/s$$

$$a_A = (a_A)_n = r\omega^2 = AB \times \omega_1^2$$
$$= 0.23 \times 6^2 = 8.28\, m/s^2$$

يبين الشكل الاتجاه الفعلي لكل من سرعة وتسارع الحلقة .

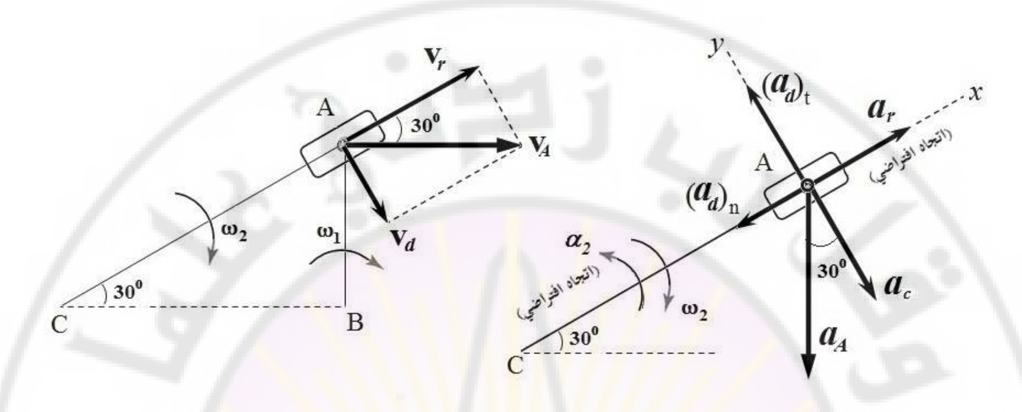
السرعة الزاويّة للذراع CD : نلاحظ أن حركة الحلقة A هي حركة مركبة ، لهذا يمكن تحليل سرعتها كما هو مبين في الشكل إلى سرعتين : الأولى نسبية على امتداد الذراع CD والثانية مكتسبة تنتقل بفعل دوران نفس الذراع بسرعة مقدارها ω_2 . أي أن :

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_d$$

حيث :

$$v_r = v_A \cos 30° = 1.38 \times 0.866 = 1.2\, m/s$$
$$v_d = v_A \sin 30° = 1.38 \times 0.5 = 0.69\, m/s$$

$$\omega_2 = \frac{v_d}{AC} = \frac{0.69}{0.46} = 1.5\, rad/s$$



التسارع الزاويّ للذراع CD : لدينا :

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_d + \boldsymbol{a}_c$$

نرسم أشعة هذه التسارعات كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب القيم الآتية :

$$a_r = ?$$

$$(a_d)_t = r\alpha = 0.46 \times \alpha_2 = 0.46\alpha_2 \quad m/s^2$$

$$(a_d)_n = r\omega^2 = 0.46 \times (1.5)^2 = 1.04 \;\; m/s^2$$

$$a_c = 2\omega_2 v_r = 2 \times 1.5 \times 1.2 = 3.6\, m/s^2$$

نقوم بإسقاط العلاقة الشعاعية للتسارعات على محور الإحداثيات y فنحصل بعد التعويض على التسارع الزاوي α_2 المطلوب وذلك كما يلي :

$$-a_A \cos 30° = (a_d)_t - a_{cor}$$

$$-8.28 \times \cos 30° = 0.46\alpha_2 - 3.6$$

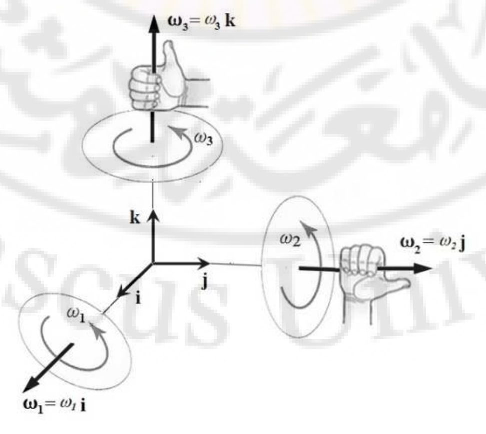
$$\alpha_2 = -7.76\, rad/s^2$$

إشارة السالب تبين أن الاتجاه الفعلي للتسارع الزاوي هو مع اتجاه دوران عقارب الساعة .

8–5 الحركة الفراغية (Three-Dimensional Motion)

بالرغم من أن نسبة كبيرة من مسائل الحركة يجري حلها باستخدام مبادئ الحركة المستوية ، إلا أن التطور العصري ركّز الانتباه على مسائل يتطلب حلها تحليل الحركة في ثلاثة أبعاد. وكما هو مبين في المثالين (23) و (24) فإنه ينبغي لحل مسائل الحركة الفراغية تنفيذ الخطوات الآتية :

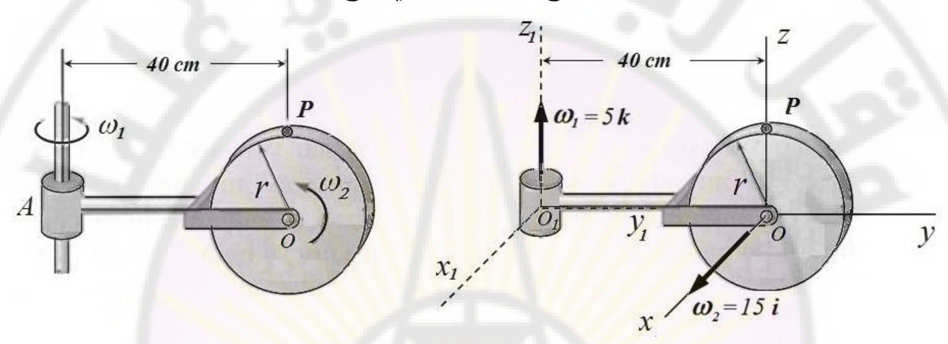
1. اختيار جملتي محاور إحداثية إحداهما متحركة والأخرى ثابتة .
2. تمثيل السرعات الزاويّة (وكذلك الأمر بالنسبة للتسارعات الزاويّة) في الجملة الميكانيكية المدروسة بأشعة وذلك استناداً إلى قاعدة اليد اليمنى كما هو مبين في الشكل(8–21) .
3. تعيين مواصفات الحركة (الموضع والسرعة والتسارع) لأية نقطة من الجسم المدروس بتطبيق المعادلات الرياضية التي تربط بين الحركة المطلقة والنسبية والمكتسبة ، والتي جرى استنتاجها في الحركة المركبة للجسيمات المادية .
4. الاستعانة عند الضرورة بمعادلات الجداء الشعاعي للأزواج المختلفة لأشعة الواحدة في الإحداثيات الديكارتية المتعامدة ، والموضحة في الشكل(8–17). مع ملاحظة أن الجداء الشعاعي لشعاع الواحدة بنفسه يساوي صفراً .



الشكل (8–21)

مثال رقم (23)

يُثبّت قرص مستدير نصف قطره r = 15cm بالذراع OA كما هو مبين في الشكل . يدور هذا الذراع حول محور رأسي يمر من النقطة A بسرعة زاوية ثابتة ω_1=5rad/s بينما يدور القرص حول محور أفقي يمر من النقطة O وفق الاتجاه المبين بسرعة زاوية ثابتة ω_2=15rad/s . أوجد سرعة وتسارع النقطة P التي تقع على محيط القرص .



الحل : ....

نختار جملتي إحداثيات إحداهما متحركة ولتكن ($oxyz$) والأخرى ثابتة ولتكن ($o_1x_1y_1z_1$) كما هو مبين في الشكل، ثم نرسم شعاعي السرعتين الزاويتين باستخدام قاعدة اليد اليمنى . نحدد موضع النقطة $\boldsymbol{P}$ بالنسبة للنقطتين O و O_1 وذلك كما يلي :

$$\boldsymbol{r}_{p/o} = 0.15\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{r} = 0.4\boldsymbol{j} + 0.15\boldsymbol{k}$$

سرعة النقطة P : تتحدد السرعة المطلقة للنقطة P بالجمع الشعاعي لسرعتها النسبية المأخوذة بالنسبة لجملة المحاور المتحركة مع سرعتها المكتسبة المأخوذة بالنسبة لجملة المحاور الثابتة وذلك كما يلي:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_d$$

حيث :

$$\mathbf{V}_r = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{p/o} = (15\boldsymbol{i}) \times 0.15\boldsymbol{k} = -2.25\boldsymbol{j}$$
$$\mathbf{V}_d = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r} = 5\boldsymbol{k} \times (0.4\boldsymbol{j} + 0.15\boldsymbol{k}) = -2\boldsymbol{i}$$

نعوض فنجد :

$$\mathbf{V}_P = -2\boldsymbol{i} - 2.25\boldsymbol{j}$$
$$v_P = \sqrt{(-2)^2 + (-2.25)^2} = 3\ m/s$$

تسارع النقطة P : يتحدد التسارع المطلق للنقطة P بالجمع الشعاعي للتسارعات الآتية: النسبي $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ والمكتسب $\boldsymbol{a}_{\mathrm{d}}$ والمتمم $\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}$ وذلك كما يلي:

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_d + \boldsymbol{a}_c$$

وتحسب هذه المقادير الشعاعية كما يلي :

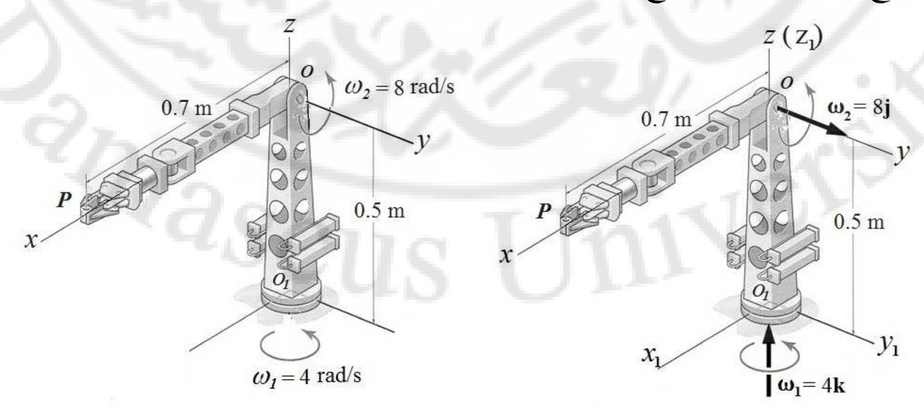
$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{V}_r = 15\boldsymbol{i} \times (-2.25\boldsymbol{j}) = -33.75\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{a}_d = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_d = 5\boldsymbol{k} \times -2\boldsymbol{i} = -10\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_r = 2(5\boldsymbol{k}) \times (-2.25\boldsymbol{j}) = 22.5\boldsymbol{i}$$

نعوض فنجد :

$$\boldsymbol{a}_P = 22.5\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} - 33.75\boldsymbol{k}$$
$$a_P = \sqrt{(22.5)^2 + (-10)^2 + (-33.75)^2} = 41.8\ m/s^2$$

مثال رقم (24)

يدور الذراع الآلي OP حول محوره y بسرعة زاوية منتظمة تساوي 8 rad/s في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة . وفي الوقت نفسه يدور الهيكل بأكمله حول المحور z بسرعة زاوية منتظمة 4 rad/s في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة أيضاً . أوجد للوضع المبين سرعة وتسارع الرأس القابض $\boldsymbol{P}$.



الحل : ....

نختار جملتي إحداثيات إحداهما متحركة ولتكن ($oxyz$) والأخرى ثابتة ولتكن ($o_1x_1y_1z_1$) كما هو مبين في الشكل، ثم نرسم شعاعي السرعتين الزاويتين باستخدام قاعدة اليد اليمنى. نحدد بعد ذلك موضع النقطة $\boldsymbol{P}$ بالنسبة للنقطتين O و O_1 وذلك كما يلي:

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{p}/\boldsymbol{o}} = 0.7\boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{r} = 0.5\boldsymbol{k} + 0.7\boldsymbol{i}$$

سرعة النقطة P : تتعين السرعة المطلقة للنقطة P بالجمع الشعاعي لسرعتها النسبية المأخوذة بالنسبة لجملة المحاور المتحركة مع سرعتها المكتسبة المأخوذة بالنسبة لجملة المحاور الثابتة وذلك كما يلي:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_d$$
$$\mathbf{V}_r = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{p/o} = 8\boldsymbol{j} \times 0.7\boldsymbol{i} = -5.6\boldsymbol{k}$$
$$\mathbf{V}_d = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r} = 4\boldsymbol{k} \times (0.5\boldsymbol{k} + 0.7\boldsymbol{i}) = 2.8\boldsymbol{j}$$

نعوض فنجد :

$$v_P = \sqrt{(2.8)^2 + (-5.6)^2} = 6.26\, m/s$$

تسارع النقطة P : يتحدد التسارع المطلق للنقطة P بالجمع الشعاعي للتسارعات الآتية: النسبي $\boldsymbol{a}_r$ والمكتسب $\boldsymbol{a}_d$ والمتمم $\boldsymbol{a}_c$ وذلك كما يلي:

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_d + \boldsymbol{a}_c$$

وتحسب هذه المقادير الشعاعية كما يلي :

$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{V}_r = 8\boldsymbol{j} \times (-5.6\boldsymbol{k}) = -44.8\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{a}_d = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_d = 4\boldsymbol{k} \times 2.8\boldsymbol{j} = -11.2\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_r = 2(4\boldsymbol{k}) \times (-5.6\boldsymbol{k}) = 0$$

نعوض فنجد :

$$\boldsymbol{a}_P = -56\boldsymbol{i} \quad \Rightarrow \quad a_p = -56\, m/s^2$$

مسائل غير محلولة
UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

تبدأ المجموعة المبينة في الشكل حركتها من السكون . إذا كان تسارع البكرة ثابتا وقدره 2 rad/s^2 وموافقا لاتجاه عقارب الساعة، فأوجد بعد مضي خمس ثوانٍ مقدار الانتقال والسرعة والتسارع لكل من الثقلين A و B .

الجواب :

$S_A = 5$ m ; $\mathbf{v_A} = 2$ m/s (↓) ; $\boldsymbol{a_A} = 0.4$ m/s^2(↓)
$S_B = 10$ m ; $\mathbf{v_B} = 4$ m/s (↓) ; $\boldsymbol{a_B} = 0.8$ m/s^2 (↓)

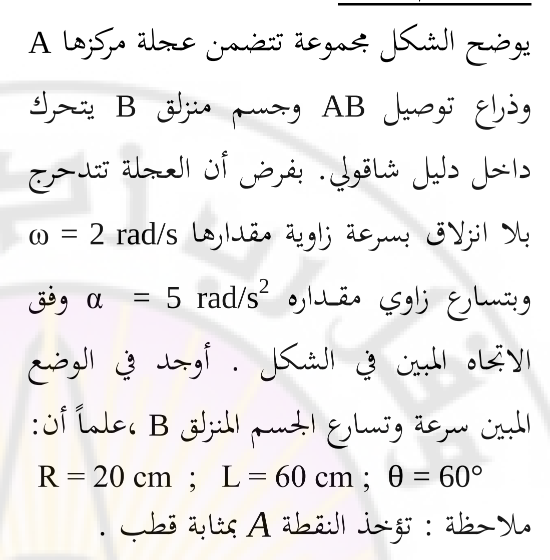
مسألة رقم (2) :

يبين الشكل المرافق زوج من المسننات الواقعة في حالة تعشيق .إذا كان المسنن A يدور في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة بسرعة مقدارها 340rad/s وبتسارع مقداره $120 rad/s^2$ فأوجد عندئذ ما يلي :

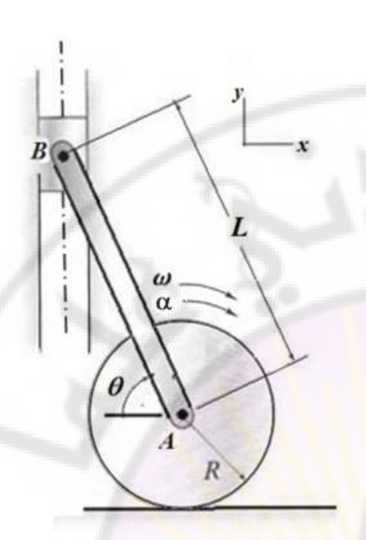
1. سرعة نقطة التماس p بين المسننين .
2. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للمسنن B .

الجواب :

$\mathbf{V_p} = 61.2$ m/s (↓) ; $\boldsymbol{\omega_B} = 510$ rad/s(↷) ; $\alpha_B = 180$ rad/s^2(↷)



مسألة رقم (**3**) :



يوضح الشكل مجموعة تتضمن عجلة مركزها A وذراع توصيل AB وجسم منزلق B يتحرك داخل دليل شاقولي. بفرض أن العجلة تتدحرج بلا انزلاق بسرعة زاوية مقدارها $\omega = 2\ rad/s$ وبتسارع زاوي مقداره $\alpha = 5\ rad/s^2$ وفق الاتجاه المبين في الشكل . أوجد في الوضع المبين سرعة وتسارع الجسم المنزلق B ،علماً أن:

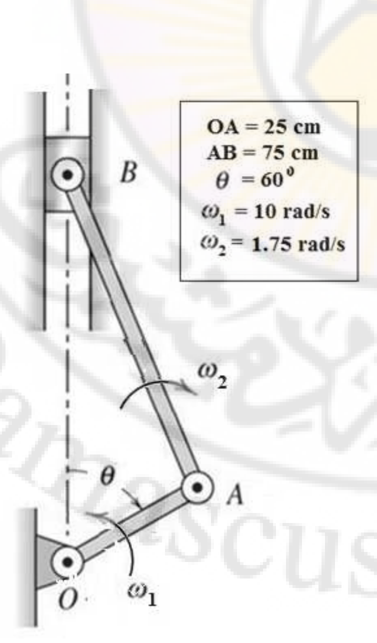
$R = 20\ cm$; $L = 60\ cm$; $\theta = 60°$

ملاحظة : تؤخذ النقطة *A* بمثابة قطب .

الجواب :

$\mathbf{v_B} = 0.23\ m/s(\downarrow)$; $\boldsymbol{a_B} = 1\ m/s^2(\downarrow)$

مسألة رقم (**4**) :



يدور عمود المرفق OA حول النقطة O دوراناً منتظماً في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة وبسرعة زاوية مقدارها 10rad/s كما هو موضح في الشكل المجاور . أوجد في اللحظة التي تكون فيها $\theta = 60°$ ما يلي :

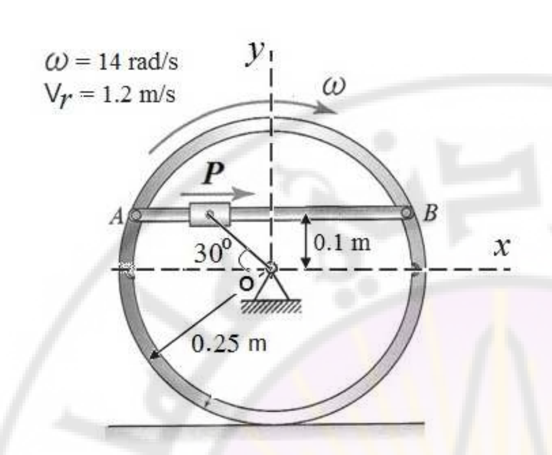
- سرعة المكبس B .
- تسارع المكبس B .

ملاحظة : تؤخذ النقطة *A* بمثابة قطب .

الجواب :

$\mathbf{v_B} = 2.55\ m/s\ (\uparrow)$; $\boldsymbol{a_B} = 8.31\ m/s^2\ (\downarrow)$

مسألة رقم (5) :



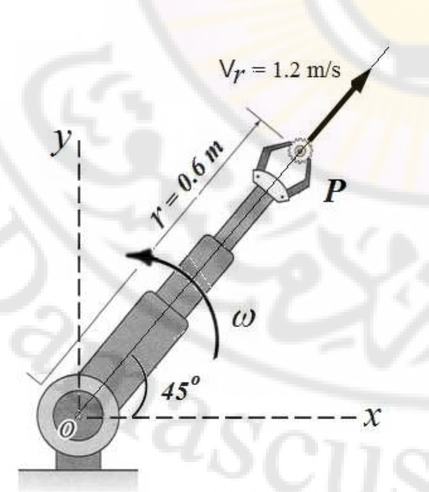
تدور العجلة الموضحة في الشكل المجاور حول النقطة O دوراناً منتظماً بسرعة زاوية مقدارها ω=14 rad/s . وتتحرك الحلقة P على امتداد الوتر AB بسرعة خطية ثابتة مقدارها 1.2m/s.أوجد في الوضع المبين ما يلي :

- السرعة المطلقة للحلقة P .
- التسارع المطلق للحلقة P .

الجواب :

$V_p = 3.1$ m/s ; $a_p = 36.72$ m/s^2

مسألة رقم (6) :

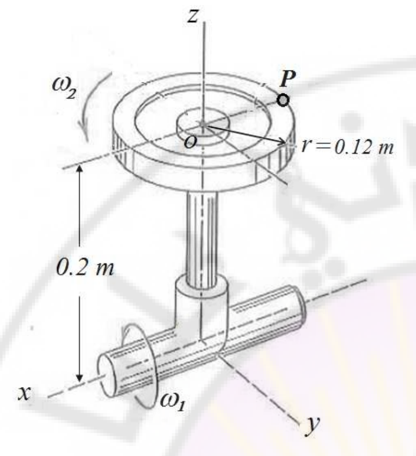


يدور الذراع الآلي (robot arm) ***OP*** بسرعة زاوية منتظمة قدرها ω=0.8 rad/s في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة . وفي الوقت نفسه يتحرك الرأس القابض ***P*** باتجاه الأعلى بسرعة خطية ثابتة قدرها v_r =1.2 m/s . أوجد سرعة الرأس القابض وتسارعه في الوضع المبين.

الجواب :

$V_p = 1.29$ m/s ; $a_p = 1.96$ m/s^2

مسألة رقم (7) :

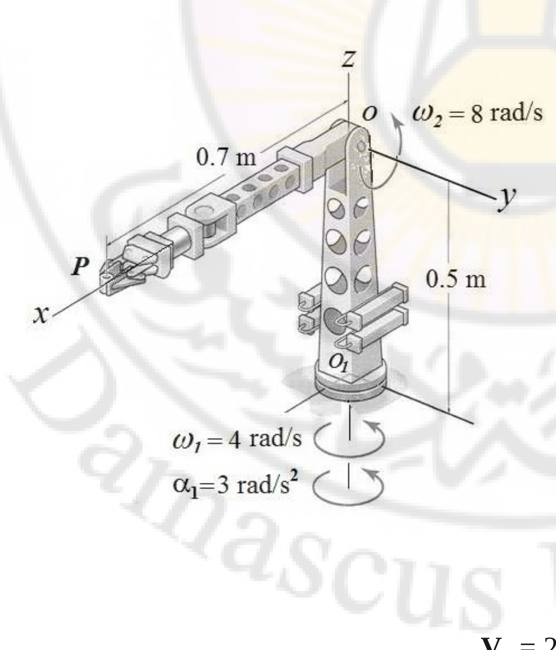


يدور قرص دائري حول محوره z بسرعة زاوية منتظمة تساوي 20 rad/s في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة . وفي الوقت نفسه تدور المجموعة بأكملها حول المحور الثابت x بسرعة زاوية منتظمة 10 rad/s في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة أيضاً . أوجد سرعة وتسارع النقطة ***P*** التي تقع على محيط القرص .

الجواب :

$\mathbf{V_p} = -4.4\mathbf{j}$ m/s ; $\boldsymbol{a}_\mathbf{p} = 48\mathbf{i} - 68\mathbf{k}$ m/s^2

مسألة رقم (8) :



يدور الذراع الآلي OP حول محوره y بسرعة زاوية منتظمة تساوي $\omega_2 = 8$rad/s في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة . وفي الوقت نفسه يدور الهيكل بأكمله حول المحور z بسرعة زاوية $\omega_1 = 4$rad/s وبتسارع زاوي مقداره $\alpha_1 = 3$ rad/s^2 وفق الاتجاهات الموضحة. أوجد للوضع المبين سرعة وتسارع الرأس القابض ***P*** .

الجواب :

$\mathbf{V_p} = 2.8\mathbf{j} - 5.6\mathbf{k}$ m/s , $\boldsymbol{a}_\mathbf{p} = -56\mathbf{i} + 2.1\mathbf{j}$ m/s^2

الباب الثالث

علم التحريك

KINETICS

يتضمن هذا القسم :

- **الفصل التاسع** : تحريك الجُسَيْمات المادية .
- **CHAPTER 9** : Kinetics of Particles
- **الفصل العاشر** : تحريك الأجسام الصلبة .
- **CHAPTER 10** : Kinetics of Rigid Bodies
- **الفصل الحادي عشر** : تطبيقات خاصة .
- **CHAPTER 11** : Special Applications

Damascus University

يعتمد علم التحريك في حل المسائل
على الطرق الثلاث الآتية :

(1) – طريقة القوة والتسارع

Force and Acceleration Method

(2) – طريقة العمل والطاقة

Work and Energy Method

(3) – طريقة الدفع وكمية الحركة

Impulse and Momentum Method

Damascus University

الفصل التاسع

تحريك الجُسَيْمات المادية

KINETICS OF PARTICLES

تمهيد : علم التحريك (Kinetics) هو القسم الذي يبحث في قوانين حركة الأجسام تحت تأثير القوى المختلفة . تبين التجارب التي نفذت على حركة الأجسام ، أن حركة الجسم تتوقف بوجه عام على كتلته وعلى القوى المؤثرة فيه بصورة أساسية .هناك ثلاث طرق لحل مسائل علم التحريك وهي :

- التطبيق المباشر للقانون الأساسي في التحريك، والمعروف بالقانون الثاني لنيوتن.
- طريقة العمل والطاقة (Work and Energy) .
- طريقة الدفع وكمية الحركة (Impulse and Momentum) .

وعلى وجه العموم ، تستخدم الطريقة الأولى في حل المسائل التي تهتم فيها اهتماماً خاصاً بدراسة تسارع الحركة . بينما تستخدم الطريقة الثانية في المسائل التي تهتم فيها بدراسة السرعة والانتقال مع صرف النظر عن حساب التسارع . أما الطريقة الثالثة فتستخدم في حل المسائل التي تهتم فيها بدراسة السرعة والزمن .

1–9 القانون الأساسي في التحريك (Basic Law of Kinetics) :

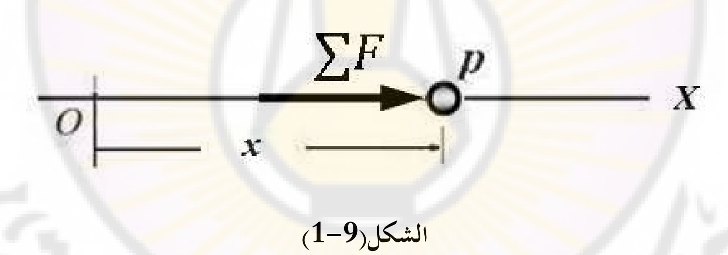
يبحث علم التحريك عند استخدام هذا القانون في نوعين من المسائل :

a) تعيين القوى المؤثرة في الجسم عندما يكون التسارع معلوماً . وإذا لم يكن التسارع معطى مباشرة ، حينئذ يمكن حساب التسارع بموجب المعادلات المستنتجة في علم الحركة .

b) تعيين التسارع عندما تكون القوى المؤثرة في الجسم معلومة .

الحركة الخطية المستقيمة (Rectilinear Motion) :

بفرض أن الجسيم P يتحرك في مسار مستقيم تحت تأثير القوى المطبقة $\sum \mathbf{F}$ كما هو مبين في الشكل(9–1).في هذه الحالة يتعين موضع P على المسار بالإحداثية x .



الشكل(9–1)

واستناداً إلى القانون الأساسي في التحريك يمكن تحديد العلاقة بين مجموع القوى $\sum \boldsymbol{F}$ والموضع x كما يلي :

$$\sum F = ma = \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \qquad (1)$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة التفاضلية لحركة الجسيم في خط مستقيم .ويمكن حل هذه المعادلة لكل مسالة مفروضة بعد توضيح صورة طرفها الأيسر الذي يعتمد على طبيعة القوى المؤثرة في الجسيم المدروس . وفي حل مسائل الحركة الخطية المستقيمة لجسم واحد حر أو لمجموعة أجسام موصولة معاً بحبال مثلاً ، ينبغي اتباع الخطوات الآتية :

- رسم مخطط الجسم الحر : هذه الخطوة هامة جداً لأنها تُظهر جميع القوى التي يخضع لها الجسم المدروس . وإذا كان الجسم يتحرك على سطح استناد خشن ، فيجب عندئذ إضافة قوة في منطقة التماس بين الجسم وسطح الاستناد بحيث تؤثر بعكس اتجاه حركة الجسم. تدعى هذه القوة بقوة الاحتكاك الحركي $\boldsymbol{F}$ وتتعين بالعلاقة :

$$F = \mu_k N \qquad (2)$$

حيث :

μ_k – مُعامل الاحتكاك الحركي (Coefficient of kinetic friction) .

$\boldsymbol{N}$ – رد الفعل الناظمي لسطح الاستناد .

- تطبيق القانون الأساسي في التحريك : في هذه الحالة نقوم بإسقاط طرفي القانون المذكور على محور الإحداثيات المفروض .
- الرجوع عند الضرورة إلى المعادلات المستنتجة في علم الحركة من أجل حساب موضع الجسم أو سرعته ، والتي تشمل معادلات حالتي التسارع الثابت والمتغير مع الزمن الآتية :

في حالة التسارع المتغير مع الزمن لدينا :

$$v = \frac{ds}{dt} \quad ; \; a = \frac{dv}{dt}$$

وفي حالة التسارع الثابت لدينا :

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\, at^2$$

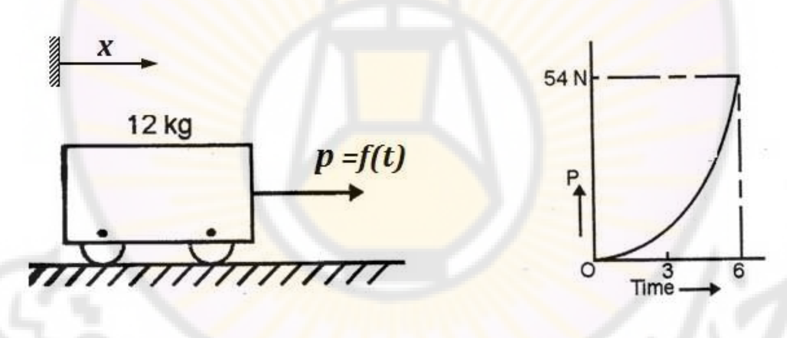
$$v^2 = {v_0}^2 + 2a(s - s_0)$$

ولا بد من الإشارة إلى الملاحظة الآتية :

عندما تكون القوة أو مجموعة القوى المؤثرة في الجسم المفروض متغيرة مع الزمن فهذا يعني أن التسارع الذي يكتسبه ذلك الجسم سيكون أيضاً متغيراً مع الزمن كما هو الحال في المثال (1) . وبالمقابل عندما تكون القوة أو مجموعة القوى المؤثرة في الجسم ثابتة ولا تتغير مع الزمن فهذا يعني أن التسارع الذي يكتسبه ذلك الجسم سيكون أيضاً ثابتاً كما هو الحال في بقية الأمثلة .

مثال رقم (1)

تبدأ عربة صغيرة كتلتها 12kg حركتها من السكون . تخضع هذه العربة لتاثير قوة أفقية تتغير مع الزمن تبعاً للعلاقة : $P = 1.5t^2$ حيث القوة بوحدة النيوتن والزمن بالثانية. احسب موضع العربة x وسرعتها وتسارعها بعد 6 sec من بدء الحركة .



الحل : ....

نطبق القانون الأساسي في التحريك في اتجاه المحور x الموافق لاتجاه حركة العربة :

$$\sum F = ma$$

$$P = 12a$$

$$1.5t^2 = 12a \qquad \Rightarrow a = \frac{1.5t^2}{12}$$

$$1.5t^2 = 12\frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \int_0^t 1.5t^2\,dt = \int_0^v 12\,dv$$

$$0.5t^3 = 12v \quad \Rightarrow v = \frac{0.5t^3}{12} = 9\ m/s$$

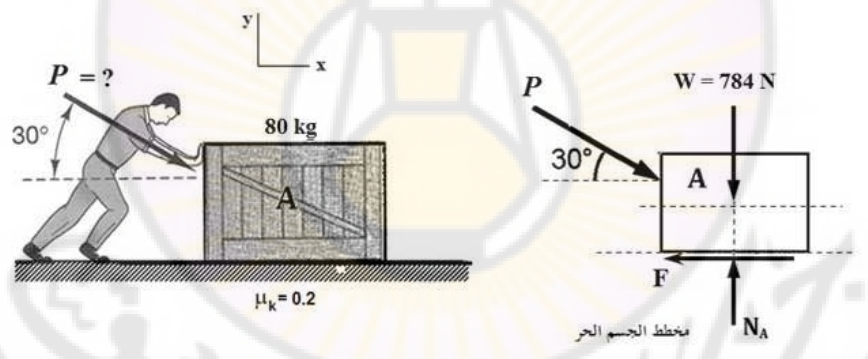
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{24} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{t^3}{24} dt \quad \Rightarrow\ x = \frac{t^4}{96}$$

$$x = 13.5\ m$$

مثال رقم (2)

يرتكز صندوق كتلته 80kg على سطح أفقي خشن كما هو مبين في الشكل.أوجد القوة **P** الضرورية لتحريك هذا الصندوق بتسارع مقداره $2.5\ m/s^2$. بفرض أن معامل الاحتكاك الحركي بين الصندوق وسطح الاستناد يساوي 0.25 .



الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر للصندوق A كما هو مبين في الشكل . واضح أن هذا الصندوق يخضع لتأثير أربع قوى وهي : الوزن **W** ، ورد الفعل الناظمي لسطح الاستناد $\mathbf{N_A}$ ، وقوة الاحتكاك $\mathbf{F=0.25N_A}$ ، والقوة الخارجية **P** . وبتطبيق القانون الاساسي في التحريك مع ملاحظة أن الصندوق يتحرك فقط في الاتجاه الأفقي الموافق للمحور x:

$$\sum F_x = ma$$

$$P\cos 30° - 0.25N_A = 80 \times 2.5 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

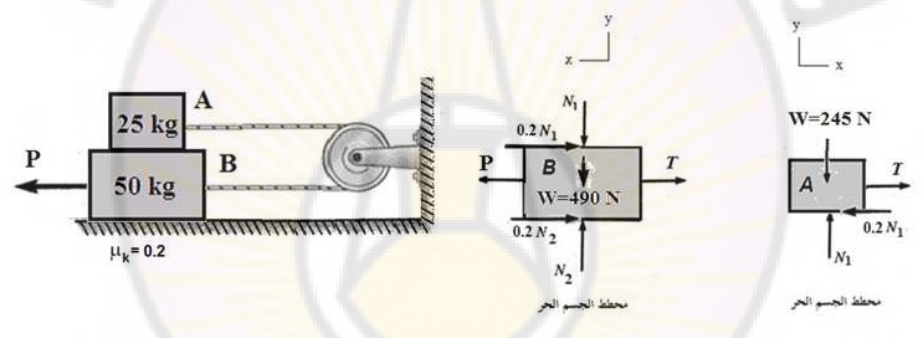
$$N_A - P\sin 30° - 784 \quad = 0 \qquad (2)$$

ينتج بالحل المشترك للمعادلتين (1) و(2) القوة المطلوبة الآتية :

$$P = 534\,N$$

مثال رقم (3)

يرتكز الجسم A ذو الكتلة 25kg على الجسم B ذي الكتلة 50kg . كما يُربط الجسمان بمساعدة حبل يمر على بكرة ثابتة كما هو موضح في الشكل المرافق. احسب التسارع الذي يكتسبه الجسمان عند تطبيق قوة أفقية **P** مقدارها 410N. علماً أن معامل الاحتكاك الحركي لجميع السطوح المتلامسة هو $\mu_k = 0.2$.



الحل : ....

الجسم A : يبين الشكل مخطط الجسم الحر لكل من الجسمين A و B.بتطبيق القانون الأساسي في التحريك مع ملاحظة أن الجسم A سوف يتحرك إلى اليمين :

$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; N_1 - 245 = 0 \quad \Rightarrow\; N_1 = 245\,N$$

$$\Sigma F_x = ma \;\Rightarrow\; T - 0.2N_1 = 25a$$

$$T - 49 = 25a \qquad (1)$$

الجسم B : بتطبيق القانون الاساسي في التحريك مع ملاحظة أن هذا الجسم سوف يتحرك إلى اليسار :

$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; N_2 - N_1 - 490 = 0 \quad \Rightarrow\; N_2 = 735\,N$$

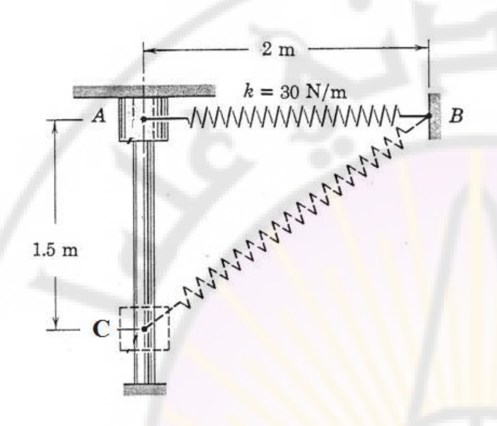
$$\Sigma F_x = ma \;\Rightarrow\; 410 - T - 0.2N_1 - 0.2N_2 = 50a$$

$$214 - T = 50a \qquad (2)$$

ينتج بالحل المشترك للمعادلتين (1) و(2) التسارع المطلوب الآتي :

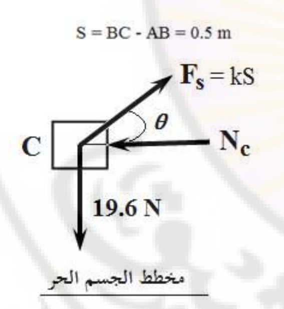
$$a = 2.2\ m/s^2$$

مثال رقم (4)



حلقة كتلتها m=2kg تنزلق على عمود شاقولي أملس كما هو مبين في الشكل. إذا كان طول النابض الحر المربوط بالكتلة يساوي 2m ، وكان ثابت النابض k=30N/m ، فأوجد رد فعل العمود وكذلك تسارع الحلقة بعد هبوطها من حالة السكون بمقدار 1.5m .

الحل : ....



نرسم مخطط الجسم الحر للحلقة كما هو مبين في الشكل . واضح أن هذه الحلقة تخضع لتأثير ثلاث قوى وهي : الوزن **W** ، ورد فعل العمود $\mathbf{N_c}$ ، وقوة النابض $\mathbf{F_s}$ التي تتناسب قيمتها طرداً مع الاستطالة s ، وتحسب كما يلي :

$$F_s = ks = 30(2.5 - 2) = 15\ \text{N}$$

وبتطبيق القانون الاساسي في التحريك مع ملاحظة أن الحلقة تتحرك فقط في الاتجاه الشاقولي الموافق للمحور y . إذن :

$$\sum F_x = 0$$

$$F_s cos\theta - \text{N}_\text{c} = 0 \ \Rightarrow \text{N}_\text{c} = 15(0.8) = 12\ \text{N}$$

$$\sum F_y = ma$$

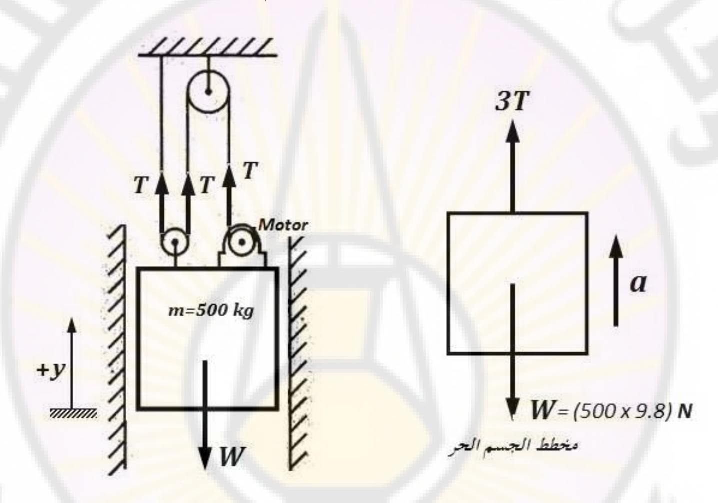
$$W - F_s sin\theta = 2a$$

وبالتعويض نجد :

$$19.6 - 15\,(0.6) = 2a \quad \Rightarrow \; a = 5.3\, m/s^2$$

مثال رقم (5)

مصعد كهربائي كتلته 500kg يبدأ حركته من السكون للأعلى وبتسارع ثابت . إذا علمت ان سرعة هذا المصعد قد بلغت 2m/s بعد أن قطع مسافة مقدارها 5m احسب الشد في الكبل في أثناء هذه الحركة المتسارعة بانتظام.



الحل : ....

بما أنّ المصعد يتحرك بتسارع ثابت إذن يمكن أن نكتب :

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a(s - s_0)$$

بالتعويض نجد :

$$2^2 = 0 + 2a(5) \qquad \Rightarrow a = 0.4\, m/s^2$$

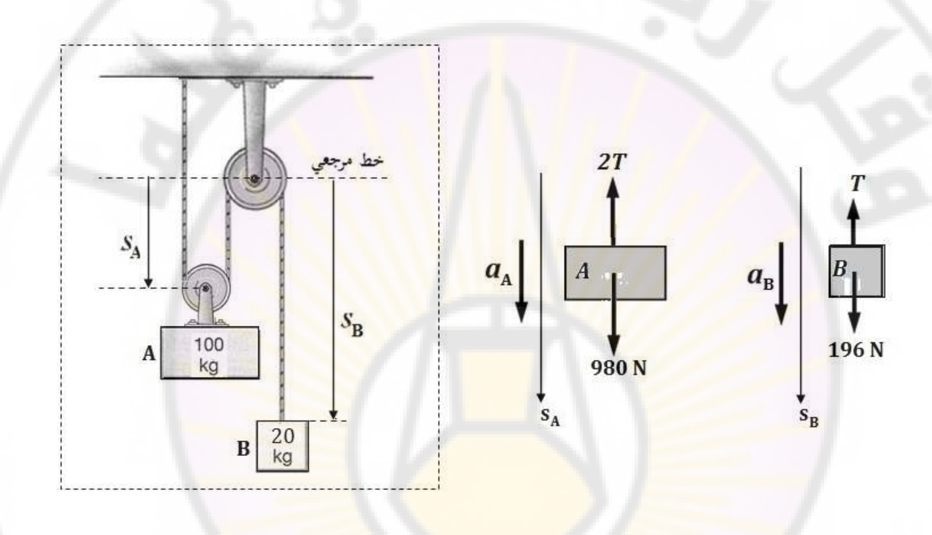
نرسم مخطط الجسم الحر للمصعد كما هو مبين في الشكل ، ثم نطبق القانون الأساسي في التحريك في اتجاه المحور الشاقولي y الموافق لاتجاه حركة الصعود:

$$\sum F = ma$$
$$3T - W = ma$$

$$3T - 500(9.8) = 500(0.4)$$
$$T = 1700\ N$$

مثال رقم (6)

تبدأ المجموعة الموضحة في الشكل حركتها من السكون . أوجد تسارع كل من الكتلتين A وB وكذلك قوة الشد في الحبل .



الحل : ....

نختار خط البداية المرجعي ثم نحدد اتجاه تزايد احداثية الموضع لكل من الكتلتين كما هو مبين في الشكل. خلال حركة الجملة تتغير الاحداثيتان s_A وs_B فقط بينما تبقى بقية أجزاء الحبل ثابتة (constant)، وبما أنّ طول الحبل L ثابت فإنّ:

$$L = 2s_A + s_B + constant$$

بإجراء تفاضل هذه العلاقة مرتين ينتج:

$$2a_A + a_B = 0 \ \Rightarrow\ 2a_A = -a_B \qquad (1)$$

الكتلة A : بناء على مخطط الجسم الحر الموضح في الشكل ، وبتطبيق القانون الأساسي في التحريك نجد :

$$+\downarrow \sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad 980 - 2T = 100a_A \qquad (2)$$

الكتلة B : بناء على مخطط الجسم الحر الموضح في الشكل ، وبتطبيق القانون الأساسي في التحريك نجد :

$$+\downarrow\ \sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad 196 - T = 20a_{\text{B}} \qquad (3)$$

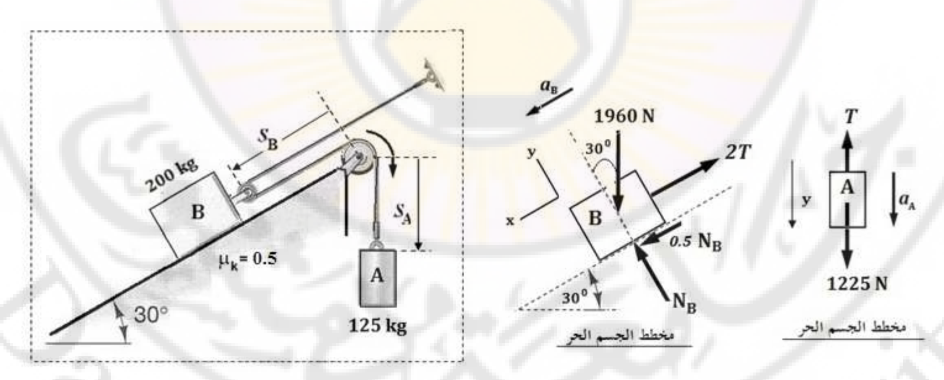
ينتج بحل المعادلات الثلاث ما يلي :

$$T = 327\ N \ ; \quad a_{\text{A}} = 3.27 \text{m/s}^2 \ ; \quad a_{\text{B}} = -6.53\ \text{m/s}^2$$

إشارة السالب تشير إلى أن الاتجاه الفعلي للتسارع a_B بعكس الاتجاه الافتراضي المبين في مخطط الجسم الحر . وبمعنى آخر سوف تتسارع حركة الكتلة B باتجاه الأعلى بينما تتسارع حركة الكتلة A باتجاه الأسفل .

مثال رقم (7)

تبدأ المجموعة الموضحة في الشكل حركتها من السكون . أوجد تسارع كل من الكتلتين A وB وكذلك قوة الشد في الحبل . علماً أن معامل الاحتكاك الحركي بين الكتلة B وسطح المستوي المائل هو $\mu_k = 0.5$.



الحل : ....

نختار خط البداية المرجعي المناسب لكل من الكتلتين A وB كما هو مبين في الشكل. خلال حركة الجملة يتغير الاحداثيان s_A وs_B فقط بينما تبقى بقية أجزاء الحبل ثابتة (constant)، وبما أنّ طول الحبل L ثابت فإنّ:

$$L = s_A + 2s_B + constant$$

بإجراء تفاضل هذه العلاقة مرتين بالنسبة للزمن ينتج:

$$a_{\mathrm{A}} + 2a_{\mathrm{B}} = 0 \ \Rightarrow \ a_{\mathrm{A}} = -2a_{\mathrm{B}} \qquad (1)$$

الكتلة A : بناء على مخطط الجسم الحر وبتطبيق القانون الأساسي في التحريك نجد :

$$+\downarrow \ \sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad 1225 - T = 125a_{\mathrm{A}} \quad (2)$$

الكتلة B : بناء على مخطط الجسم الحر الموضح في الشكل ، وبتطبيق القانون الأساسي في التحريك مع ملاحظة أنّ الكتلة B تتحرك فقط في الاتجاه الموازي للمستوي المائل :

$$\sum F_y = 0$$

$$N_B - 1960\, cos\, 30° = 0 \quad \Rightarrow \ N_B = 1697\, N$$

$$\sum F_x = ma_x$$

$$0.5(1697) - 2T + 1960\, sin\, 30° = 200a_{\mathrm{B}} \qquad (3)$$

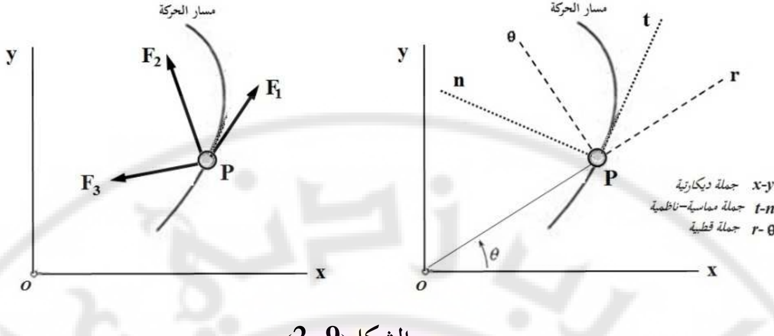
ينتج بالحل المشترك للمعادلات الثلاث (1) و(2) و(3) :

$$a_{\mathrm{A}} = 1.77\mathrm{m/s^2} \ ; \quad a_{\mathrm{B}} = -0.89\ \mathrm{m/s^2} \quad ; \ T = 1004\ N$$

إشارة السالب تشير إلى أنّ الاتجاه الفعلي للتسارع a_B بعكس الاتجاه الافتراضي المبين في مخطط الجسم الحر . وبمعنى آخر سوف تتسارع حركة الكتلة B باتجاه الأعلى بينما تتسارع حركة الكتلة A باتجاه الأسفل .

الحركة الخطية المنحنية (Curvilinear Motion) :

تعتمد الدراسة التحريكية للجسيمات في هذا النوع من الحركة على القانون الأساسي في التحريك ، وعلى نوع جملة الإحداثيات المناسبة للمسألة المطروحة. نفرض جسيماً p يتحرك تحت تأثير القوى $\mathbf{F_1}$ و$\mathbf{F_1}$ و$\mathbf{F_1}$ كما هو مبين في الشكل(9–2). نسقط طرفي القانون الأساسي في التحريك على جملة المحاور الإحداثية المختارة ، فنحصل عندئذ على معادلات الحركة الضرورية لحل المسألة . إن مسقطي القانون الأساسي في التحريك على جملة المحاور الإحداثية الديكارتية هما على النحو الآتي :



الشكل(9–2)

$$\sum F_x = ma_x \ \ ; \ \sum F_y = ma_y \qquad (3)$$

ويكون مسقطا القانون الأساسي في التحريك على جملة المحاور المماسية والناظمية على النحو الآتي :

$$\sum F_t = ma_t \ ; \ \sum F_n = ma_n \qquad (4)$$

حيث :

$$a_t = \dot{v} \ ; \ v = \rho\,\dot{\theta} \ \ ; \ a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

بينما يكون مسقطا القانون الأساسي في التحريك على جملة المحاور القطبية على النحو الآتي:

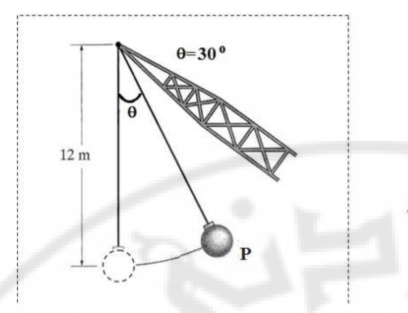
$$\sum F_r = ma_r \ ; \ \ \sum F_\theta = ma_\theta \qquad (5)$$

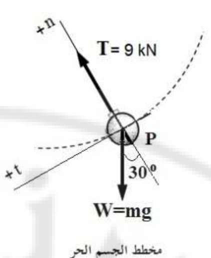
حيث :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \ \ ; \ \ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

مثال رقم (8)

تتحرك الكرة P المعلقة بمساعدة كبل رافعة على مسار دائري وفي مستو شاقولي كما هو مبين في الشكل .إذا كانت كتلة هذه الكرة تساوي 600 kg ، وكانت قوة الشد في الكبل في الموضع الموافق للزاوية 30° تساوي 9 kN ، فاحسب سرعة الكرة وتسارعها في هذا الموضع.





الحل : ....

يبين الشكل مخطط الجسم الحر للكرة عندما تكون في الموضع المفروض. باستخدام جملة الإحداثيات المماسية والناظمية وبتطبيق القانون الأساسي في التحريك يمكن تعيين مركبتي التسارع المماسية a_t والناظمية a_n للكرة والتي تتحرك على مسار دائري نصف قطره ρ=12m.

التسارع المماسي للكرة :

$$\sum F_t = ma_t$$
$$mg\ sin\ 30° = ma_t$$
$$a_t = g\ sin\ 30° = 9.8(0.5) = 4.9\ m/s^2$$

التسارع الناظمي للكرة :

$$\sum F_n = ma_n$$
$$T - mg\cos 30° = ma_n$$
$$9000 - 600(9.8)\cos 30° = 600a_n$$
$$a_n = 6.51\ m/s^2$$

سرعة الكرة :

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \quad v^2 = \rho a_n = 12 \times 6.51$$
$$v = \pm 8.84\ \frac{m}{s}$$

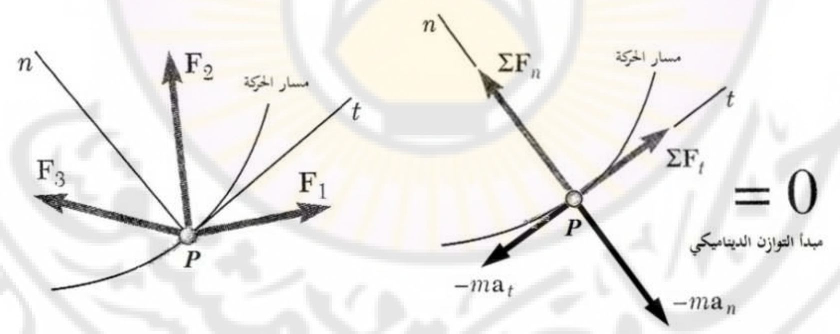
النتيجة تشير إلى أنّ اتجاه سرعة الكرة قد يكون للأعلى أو للأسفل .

التوازن الديناميكي (Dynamic equilibrium) : كما سبق القول في الفصل الأول،باستطاعتنا تحويل القانون الأساسي في التحريك إلى معادلة توازن بعد إضافة قوة العطالة الوهمية ($- ma$) إلى مجموع القوى الحقيقية المؤثرة في الجسم المدروس. وللحصول على هذه المعادلة نكتب القانون الأساسي في التحريك ، ثم ننقل الطرف الأيمن من هذا القانون إلى الطرف الأيسر فينتج:

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \sum \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

تبيّن هذه المعادلة بأنه لو أثّرت في الجسم قوة معاكسة لاتجاه تسارعه لتوازن توازناً ديناميكياً . وبالانتقال إلى الشكل المرافق فإنه لدراسة حركة الجسيم $\boldsymbol{P}$ الواقع تحت تأثير عدة قوى ، نستطيع باستخدام مبدأ التوازن الديناميكي من جهة وباستخدام جملة إحداثيات مماسية —ناظمية من جهة أخرى ، كتابة المعادلة السابقة على النحو الآتي:

$$\sum \boldsymbol{F_t} - m\boldsymbol{a_t} = \boldsymbol{0} \quad ; \quad \sum \boldsymbol{F_n} - m\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$$



نلاحظ هنا ،كما هو مبين في الشكل ، أن قوة العطالة تتألف من مُركَّبتين : الأولى مماسية ($- ma_t$) والثانية ناظمية ($- ma_n$) . في هذه الحالة تُعبِّر المركبة المماسية عن ممانعة الجسم لأي تغيير في سرعته ، بينما تُعبِّر المركبة الناظمية ، والتي تسمى بالقوة النابذة، عن ميل الجسم للانحراف والخروج عن مساره المنحني .ويستخدم مبدأ التوازن الديناميكي عادة في الدراسة المتقدمة لعلم التحريك .

9–2 مبدأ العمل والطاقة (Principle of Work and Energy) :

العمل : هو المقدار الذي يحدد تأثير القوة الواقع على الجسم عند إزاحة معينة . ولحساب هذا العمل ينبغي أولاً حساب العمل التفاضلي dU الموافق لانتقال صغير جداً، ثم بعد ذلك يجري حساب العمل الفعلي U الناتج عن انتقال الجسم لمسافة معينة (finite displacement) ، وذلك

بإجراء التكامل الرياضي المناسب.

لحساب العمل dU نتصور جسماً P يخضع لتأثير قوة ما **F** بحيث تؤدي إلى انتقاله من موضعه الابتدائي انتقالاً صغيراً ممثلاً بالشعاع **dr** كما هو مبين في الشكل(9–3). فإذا رمزنا لطول شعاع الانتقال **dr** بالرمز ds ، وكانت α هي الزاوية المحصورة بين شعاع القوة وشعاع الانتقال ، عندئذ يتحدد العمل المذكور كحاصل الجداء العددي (السُلَّمي ، الداخلي) لشعاعي القوة والانتقال وفق العلاقة :

$\vec{F}\,.\,d\vec{r} = F\,ds\cos\alpha$

الشكل(9–3)

$$dU = \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = F\,ds\,cos\alpha \qquad (6)$$

تبين هذه العلاقة الأمور الآتية :

- عمل القوة هو مقدار عددي لأنّ حاصل الجداء العددي لشعاعين هو مقدار عددي (غير شعاعي) . ويعد الجول (Joule) وحدة قياس العمل في جملة الوحدات الدولية.
- يكون عمل القوة موجباً إذا كانت الزاوية α حادة .
- ويكون عمل القوة سالباً إذا كانت الزاوية α منفرجة .
- ويكون العمل مساوياً للصفر إذا كانت الزاوية α قائمة ، أي إذا كانت القوة متجهة عمودياً على منحى الانتقال .

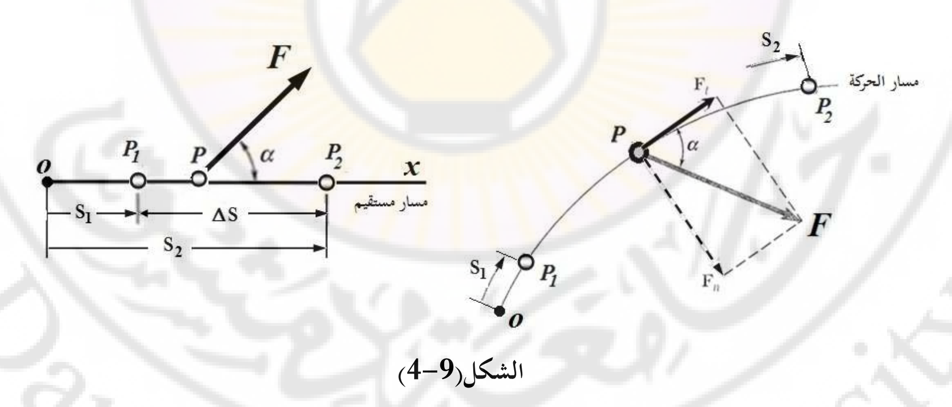
إن اجراء التكامل الرياضي للعلاقة السابقة يعطي العمل U المبذول في أي انتقال حقيقي للجسم من الموضع p_1 إلى الموضع p_2 ، في أثناء حركته على مسار مستقيم أو مسار منحن وذلك كما هو مبين في الشكل . ولهذا يمكن أن نكتب معادلة العمل على النحو الآتي :

$$U_{1-2} = \int_{p_1}^{p_2} \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} \qquad (7)$$

عندما يتحرك الجسم على مسار مستقيم وذلك تحت تأثير قوة ثابتة مثلاً كما هو مبين في الشكل(9-4) ، فإنّ عمل هذه القوة يحسب بالعلاقة الآتية :

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\ cos\alpha)\ ds = (F\ cos\alpha)\ \Delta s \qquad (8)$$

حيث : Δs – مسافة انتقال الجسم .



الشكل(9-4)

وعندما يتحرك جسم ما ، من الموضع p_1 إلى الموضع p_2 ، على مسار منحن وذلك تحت تاثير القوة **F** كما هو مبين في الشكل السابق ، فإنّ عمل هذه القوة يحسب بالعلاقة:

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\ cos\alpha)\ ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t\ ds \qquad (9)$$

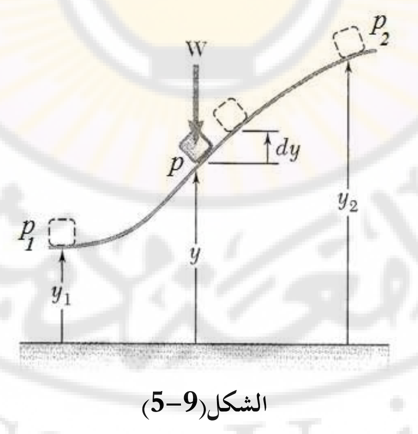
حيث : F_t – المركبة المماسية للقوة $\boldsymbol{F}$. وتشير هذه العلاقة إلى أنّ المركبة الناظمية F_n للقوة المذكورة لا تقوم بأي عمل لأنها عمودية على اتجاه الانتقال .وباستخدام المركبات الديكارتية المتعامدة للقوة والانتقال نحصل على الصورة التحليلية الآتية لمعادلة العمل:

$$U_{1-2} = \int_{p_1}^{p_2} (F_x\, dx + F_y dy) \qquad (10)$$

أمثلة على حساب العمل :

1. **عمل قوة الوزن** : نفرض أنّ الجسم p الذي تؤثر فيه قوة الوزن **W** يتحرك من الموضع p_1 إلى الموضع p_2 كما هو واضح في الشكل(5–9). نختار محور الاحداثيات الشاقولي y متجهاً نحو الأعلى ، وعندئذ نحصل استناداً إلى معادلة العمل السابقة على :

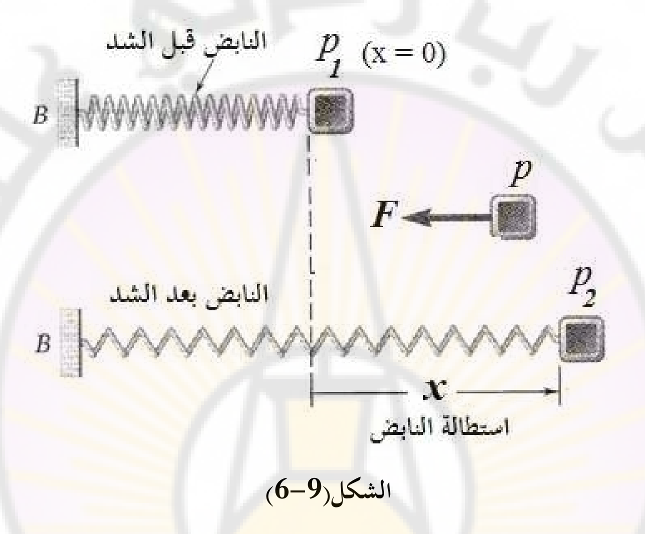
$$U_{1-2} = \int_{y_1}^{y_2} (-W)\, dy = -W(y_2 - y_1) = -W\Delta y \qquad (11)$$



الشكل(5–9)

حيث : $-\Delta y$ يمثل مقدار الانتقال الشاقولي للجسم . ومن هذه النتيجة نستنتج أنّ عمل قوة الوزن لا يتوقف على شكل المسار الذي يتحرك عليه الجسم ، ويكون العمل موجباً إذا كانت حركة الجسم إلى الأسفل.

2. **عمل قوة النابض** : نفرض أنّ جسماً p مثبّتاً بالطرف الحر لنابض كما هو واضح في الشكل(9–6). إذا شُدّ النابض من الموضع الابتدائي p_1 إلى الموضع p_2 ، واستطال بمقدار x ، فعندئذ تؤثر في الجسم القوة المرنة للنابض $\boldsymbol{F}$ المتجهة بعكس جهة انتقال ذلك الجسم .



الشكل(9–6)

وبما أنّ مقدار هذه القوة يتناسب طرداً مع استطالة النابض إذن يمكن أن نكتب :

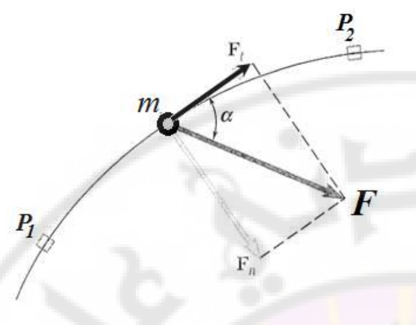
$$F = kx \qquad (12)$$

حيث k هو ثابت النابض (Spring constant) ويقاس بوحدة N/m ، ويساوي بالمقدار القوة التي يجب أن تؤثر في النابض حتى يزداد طوله متراً واحداً . يحسب العمل الذي تقوم به قوة النابض في ازاحة الجسم من الموضع الموافق $x_1 = 0$ إلى الموضع الموافق $x_2 = x$ بالعلاقة :

$$U_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} (-F)\,dx = \int_{0}^{x} (-kx)\,dx = -\frac{1}{2}kx^2 \qquad (13)$$

وهكذا فإنّ عمل قوة النابض يساوي نصف حاصل ضرب ثابت النابض بمربع استطالته أو انضغاطه .

معادلة العمل والطاقة :



الشكل(9-7)

نتصور جسماً كتلته m يخضع لتأثير القوة **F** ،ويتحرك حركة خطية منحنية مثلاً كما هو مبين في الشكل (9-7). وبما أنّ عمل القوة في الحركة الخطية المنحنية يساوي فقط إلى عمل مركبتها المماسية F_t إذن يمكن أن نكتب اعتماداً على القانون الأساسي في التحريك ما يلي :

$$F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt}$$

ولدينا من جهة أخرى :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\ \frac{dv}{ds}$$

وبالتعويض نجد :

$$F_t = mv\ \frac{dv}{ds}$$

وتكتب هذه المعادلة على النحو الآتي :

$$F_t\, ds = mv\, dv$$

وبإجراء التكامل بين الحدين الموافقين للنقطتين p_1 و p_2 الواقعتين على المسار، نجد أنّ :

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\, dv$$

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (14)$$

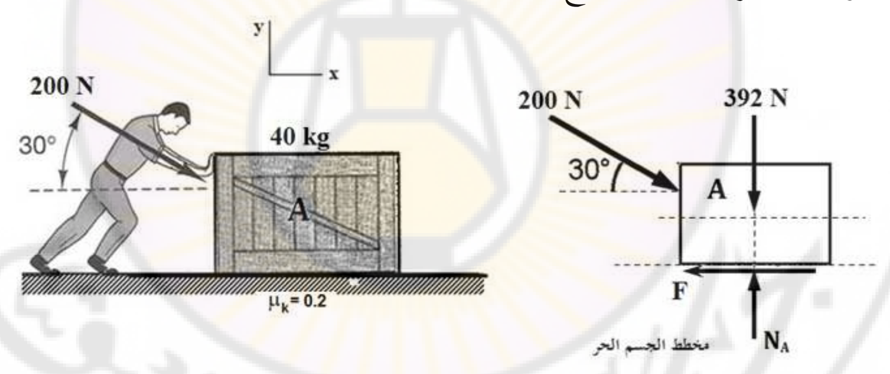
يمثل الطرف الأيسر من هذه العبارة العمل الذي تقوم به القوة . أما الطرف الأيمن فيمثل تغير الطاقة الحركية للجسم في أثناء انتقاله من موضع لآخر على مسار الحركة. فإذا رمزنا للطاقة الحركية بالرمز T عندئذ تكتب العلاقة الأخيرة على النحو الآتي :

$$U_{1-2} = T_2 - T_1 \qquad (15)$$

وهذه هي معادلة العمل والطاقة ، وهي تنص على أنّ تغير الطاقة الحركية للجسم يكافئ عمل القوى المؤثرة في ذلك الجسم في أثناء حركته من موضع لآخر .

مثال رقم (9)

يبدأ الصندوق A حركته من السكون وذلك تحت تأثير قوة الشخص المبين في الشكل . إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الصندوق وسطح الاستناد يساوي 0.2 ، فأوجد سرعة الصندوق بعد أن يقطع مسافة قدرها 10 m .



الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر للصندوق كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب رد الفعل الناظمي N_A ، وقوة الاحتكاك F من المعادلة الآتية :

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; N_A - 392 - 200\, sin30° = 0$$
$$N_A = 492\, N \;\Rightarrow F = 0.2(492) = 98.4\, N$$

نكتب معادلة العمل والطاقة ثم نعوّض فنجد :

$$U_{1-2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

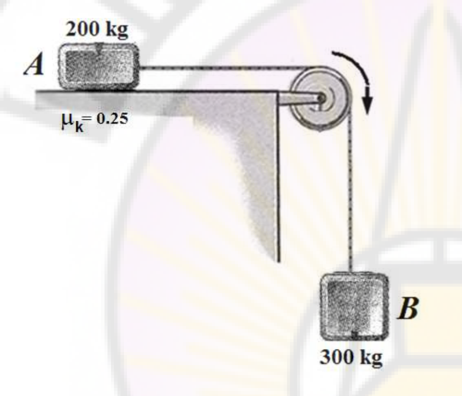
وبالتعويض ينتج أنّ :

$$(200\cos 30° - F)(S) = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0$$

$$(200\cos 30° - 98.4)(10) = \frac{1}{2}(40)v_2^2$$

$$\Rightarrow \quad v = 6.12\ m/s$$

مثال رقم (10)

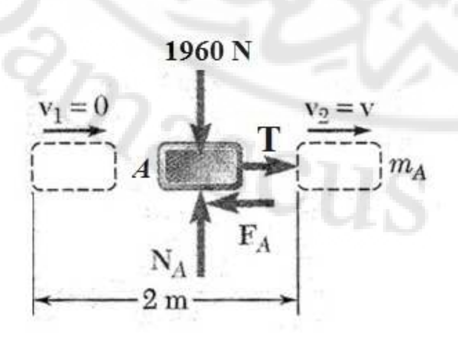


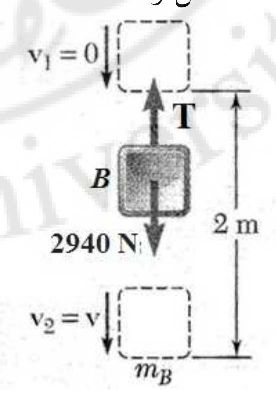
تبدأ المجموعة الموضحة في الشكل حركتها من السكون . إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الكتلة A وسطح الاستناد يساوي 0.25 ، فأوجد باستخدام معادلة العمل والطاقة ما يلي:

1. سرعة الكتلة A بعد أن تقطع مسافة قدرها 2m .
2. قوة الشد في الحبل .

الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر لكل من الكتلتين A و B كما هو مبين في الشكل ، ثم نطبق معادلة العمل والطاقة .





الكتلة A : بفرض أنّ N_A هي رد الفعل الناظمي ، وأنّ F_A هي قوة الاحتكاك ، عندئذ يكون لدينا : $m_A = 200\ kg$; $W_A = 200(9.8) = 1960\ N$

$N_A = W_A = 1960\ N$; $F_A = \mu_k N_A = 0.25(1962) = 490\ N$

نكتب معادلة العمل والطاقة ثم نعوّض فنجد :

$$U_{1-2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$T(2) - 490(2) = \frac{1}{2}(200)v^2 - 0$$

$$T - 490 = 50v^2 \qquad (1)$$

الكتلة B : لدينا : $m_A = 300\ kg$; $W_A = 300(9.8) = 2940\ N$

نكتب معادلة العمل والطاقة :

$$U_{1-2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$2940(2) - T(2) = \frac{1}{2}(300)v^2 - 0$$

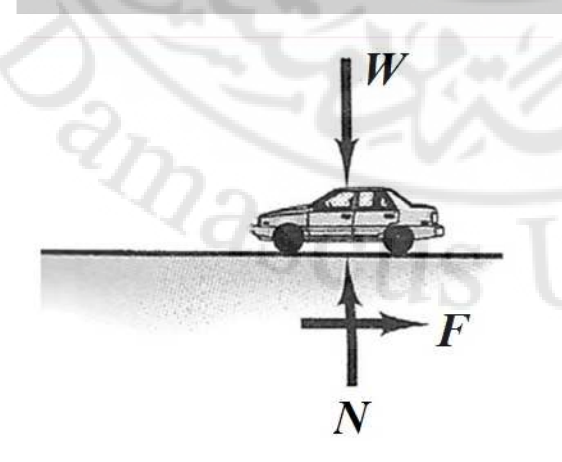
$$2940 - T = 75v^2 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و(2) طرفاً إلى طرف نحصل على ما يلي :

$$v = 4.43\ m/s \qquad T = 1470\ N$$

مثال رقم (11)

سيارة تتحرك على طريق مستقيم بسرعة قدرها 50 km/h. تبدأ السيارة بسبب تشغيل المكابح بالتباطؤ والانزلاق إلى أن تتوقف . والمطلوب كم تبلغ مسافة التوقف S في الحالتين الآتيتين :



1. سطح الطريق جاف وله معامل الاحتكاك $\mu_k = 0.7$
2. سطح الطريق رطب وله معامل الاحتكاك $\mu_k = 0.5$

الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر للسيارة والذي يبين جميع القوى المؤثرة فيها ، وتشمل الوزن **W**، ورد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N}$ ، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F}$.

لدينا : $N = W = mg \;;\; F = \mu_k N = \mu_k mg$

نكتب معادلة العمل والطاقة ثم نعوّض فنجد:

$$U_{1-2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$-(F)(S) = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$(\mathrm{f}\,mg)(S) = \frac{1}{2}mv_1^2 \;\;\Rightarrow\;\; S = \frac{v_1^2}{2\mathrm{f}\,\mathrm{g}}$$

بالتعويض في حالة الحركة على طريق جاف :

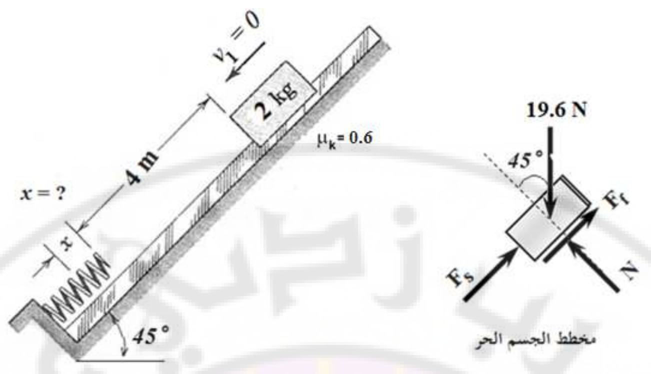
$$S = \frac{13.9^2}{2 \times 0.7 \times 9.8} = 14.1\,m$$

وبالتعويض في حالة الحركة على طريق رطب :

$$S = \frac{13.9^2}{2 \times 0.5 \times 9.8} = 19.72\,m$$

مثال رقم (12)

يبدأ الجسم المنزلق المبين في الشكل حركته من السكون. إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الجسم وسطح الاستناد يساوي 0.6 ، فأوجد القيمة القصوى لانضغاط النابض ، إذا علمت أنّ ثابت هذا النابض يساوي 500N/m .



الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل . ثم نحسب الوزن **W** ورد الفعل الناظمي **N** ، وقوة الاحتكاك $\mathbf{F_f}$ كما يلي :

$$m = 2\ kg \quad ; \quad W = 2\,(9.8) = 19.6\ N$$

$$N = 19.6 \cos 45° = 13.86\ N\ ;$$

$$F_f = 0.6\,(13.86) = 8.32\ N$$

بما أنّ سرعة الجسم المفروض تنعدم عند انضغاط النابض إلى حده الأقصى ، لذا نجد أنّ:

$$v_1 = v_2 = 0$$

$$U_{1-2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = 0$$

من الواضح أنّ العمل الكلي $U_{1\text{-}2}$ يساوي مجموع الأعمال التي تقوم بها قوة الوزن **W** وقوة الاحتكاك $\mathbf{F_f}$ وقوة النابض $\mathbf{F_s}$. أي أنّ :

$$U_{1-2} = (W sin45 - \mathrm{F_f})(x+4) - \frac{1}{2} k x^2$$

$$(19.6\ sin45° - 8.32)(x+4) - \frac{1}{2}(500) x^2 = 0$$

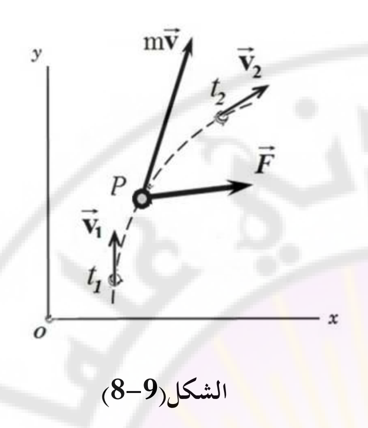
$$(5.54)(x+4) - 250\ x^2 = 0$$

$$250\ x^2 - 5.54x - 22.2 = 0$$

بحل هذه المعادلة نجد أنّ القيمة القصوى لانضغاط النابض :

$$x = 0.31\ \ m$$

3–9 مبدأ الدفع وكمية الحركة (Principle of Impulse and Momentum) :



الشكل(9–8)

الدفع (Impulse): هو المقدار الشعاعي الذي يحدد تأثير القوة الواقع على الجسم خلال فترة زمنية معينة .واستناداً إلى الشكل(9–8) فإننا نستطيع حساب الدفع $I_{1\text{-}2}$ لأية قوة **F** خلال فترة تمتد من اللحظة t_1 حتى اللحظة t_2 باستخدام التكامل الرياضي الآتي :

$$\boldsymbol{I}_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\, dt \qquad (16)$$

وعند حل مسائل الأجسام الواقعة تحت تأثير قوى مستوية ، فإنّه يمكن حساب مقدار الدفع بدلالة مسقطيه على جملة الإحداثيات الديكارتية ، وذلك على النحو الآتي :

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt \quad ; \quad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt \qquad (17)$$

وكحالة خاصة إذا كانت القوة **F** ثابتة بالمقدار والاتجاه ، فإننا نحصل على العلاقة الآتية:

$$\boldsymbol{I}_{1-2} = \boldsymbol{F}\,(t_2 - t_1) = \boldsymbol{F}\,\Delta t \qquad (18)$$

كمية الحركة (Momentum): هي المقدار الشعاعي **mv** الذي يساوي جداء كتلة الجسم بسرعته الخطية. ويتجه الشعاع **mv** بنفس اتجاه شعاع السرعة **v** .

معادلة الدفع وكمية الحركة : نتصور جسماً كتلته m يتحرك تحت تأثير القوة **F** ، وكانت سرعته في اللحظة t_1 تساوي v_1 وفي اللحظة t_2 تساوي v_2 . إذن يمكن أن نكتب اعتماداً على القانون الأساسي في التحريك ما يلي :

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

بضرب طرفي هذه المعادلة بالزمن dt ، ثم إجراء التكامل الرياضي فإننا نجد :

$$\boldsymbol{F}\,dt = d(m\mathbf{v}) \;\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,dt = \int_{\mathbf{v_1}}^{\mathbf{v_2}} d(m\mathbf{v})$$

وبملاحظة أنّ الطرف الأيسر من هذه العبارة يمثل الدفع $\mathbf{I}_{1\text{-}2}$ الناجم عن تأثير القوة $\mathbf{F}$ ، عندئذ نحصل بعد حساب تكامل الطرف الأيمن على المعادلة الآتية :

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \qquad (19)$$

وهذه هي معادلة الدفع وكمية الحركة ، وهي تنص على أنّ تغير كمية الحركة للجسم تساوي دفع القوى المؤثرة في هذا الجسم وذلك خلال فترة زمنية معينة. وينتج من هذه المعادلة أنّه إذا كانت محصلة القوى المؤثرة في الجسم تساوي صفراً فإنّ كمية حركة الجسم تكون ثابتة . وتسمى هذه النتيجة بمبدأ انحفاظ (conservation) كمية الحركة ، ويكتب على النحو الآتي:

$$m\mathbf{v} = constant \qquad (20)$$

يستخدم هذا المبدأ عادة في حل المسائل المتعلقة بتصادم الأجسام المرنة . حيث نقوم في هذه الحالة بإهمال الدفع الذي تسببه القوى الخارجية لأن زمن الصدم قصير جداً.ومن ناحية أخرى ، فإننا كثيراً ما نستخدم عند حل المسائل مسقطي المعادلة الشعاعية السابقة على محوري جملة الاحداثيات الديكارتية :

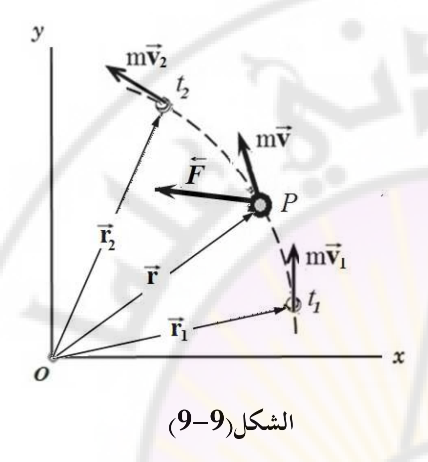
$$\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m\mathrm{v}_{2\mathrm{x}} - m\mathrm{v}_{1\mathrm{x}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m\mathrm{v}_{2\mathrm{y}} - m\mathrm{v}_{1\mathrm{y}}$$

4–9 العلاقة بين عزم كمية الحركة وعزم القوة :

Relation Between Angular Momentum and Moment of a Force

عندما يتحرك جسم كتلته m تحت تأثير القوة **F** ، وتكون سرعته في أية لحظة تساوي **v** فإنّ كمية حركته تمثل بالشعاع **mv** الذي ينطبق حامله على حامل شعاع السرعة وذلك كما هو مبين في الشكل(9–9) . نفرض أن شعاع الموضع للجسم p هو **r** ، فإذا استعملنا الرمز $\mathbf{H_o}$ للدلالة على عزم كمية الحركة بالنسبة للمبدأ o ، واستعملنا الرمز $\mathbf{M_o}$ للدلالة على عزم القوة **F** بالنسبة إلى النقطة نفسها ، عندئذ يمكن أن نستنتج العلاقة بين عزم كمية الحركة و عزم القوة .



الشكل(9–9)

حيث يتعين عزم كمية الحركة بالعلاقة :

$$\boldsymbol{H_o} = \boldsymbol{r} \times \mathrm{m}\mathbf{v} \qquad (21)$$

وباشتقاق العزم $\mathbf{H_o}$ بالنسبة للزمن نحصل على :

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{H_o}) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \mathrm{m}\mathbf{v})$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{H_o}) = (\mathbf{v} \times \mathrm{m}\mathbf{v}) + (\boldsymbol{r} \times \mathrm{m}\boldsymbol{a})$$

واستناداً إلى خواص الأشعة ، فإننا نلاحظ أن الجداء الشعاعي للمقدارين **v** و **mv** يكون مساوياً للصفر لأن لهما الاتجاه نفسه . ونلاحظ من جهة أخرى أن عزم القوة **F** المؤثرة في الجسم كما هو واضح في الشكل يتعين بالعلاقة :

$$\boldsymbol{M_o} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \mathrm{m}\boldsymbol{a}$$

عندئذ ينتج أن :

$$\boldsymbol{M_o} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{H_o}) \qquad (22)$$

بضرب طرفي هذه المعادلة بالزمن dt ، ثم إجراء التكامل الرياضي فإننا نجد :

$$\boldsymbol{M_o}\,dt = d\boldsymbol{H_o}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M_o}\,dt = \int_{H_{01}}^{H_{02}} d\boldsymbol{H_o}$$

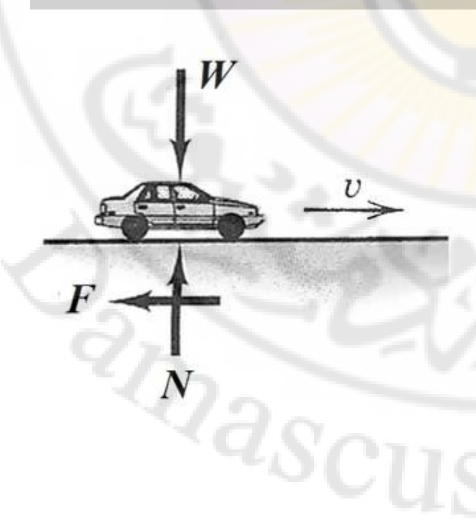
$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M_o}\,dt = \boldsymbol{H_{02}} - \boldsymbol{H_{01}} \qquad (23)$$

وينتج من هذه المعادلة أنه إذا كان عزم القوى المؤثرة حول نقطة ما يساوي صفراً فإنّ عزم كمية حركة الجسم حول النقطة نفسها يكون ثابتاً بالمقدار والاتجاه . أي أن :

$$\boldsymbol{M_o} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{H_o} = constant \qquad (24)$$

وهذه النتيجة ذات أهمية عملية كبيرة في دراسة ميكانيك الفضاء ولاسيما حركة الأقمار الصناعية . ففي هذه الحالة يتحرك القمر الصناعي تحت تأثير قوة مركزية فقط وهي قوة جذب الأرض.

مثال رقم (13)



يبين الشكل المجاور سيارة كتلتها 1500 kg.
إذا علمت أن هذه السيارة كانت تسير بسرعة قدرها 72 km/h عندما خضعت لتاثير قوة كبح مقدارها F=6000 N . والمطلوب ما هو الزمن الذي تحتاجه هذه السيارة حتى التوقف التام .

الحل : ....

لدينا من معطيات المسألة :

$$v_1 = \frac{72}{3.6} = 20\,m/s \quad ; \; v_2 = 0$$

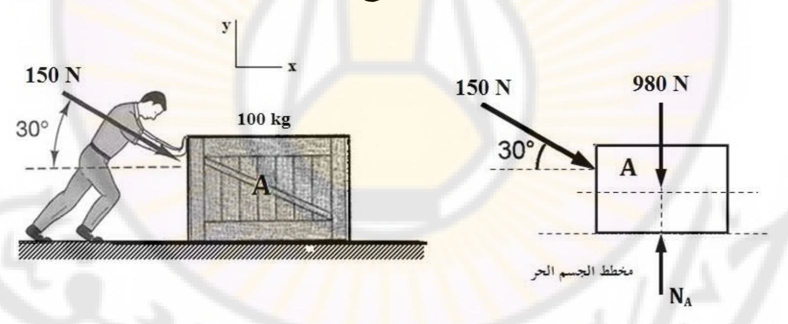
نكتب معادلة الدفع وكمية الحركة ثم نعوّض فنجد:

$$\sum I_{1-2} = mv_2 - mv_1$$
$$-(F)(t) = 0 - mv_1$$
$$-(6000)(t) = 0 - 1500(20)$$
$$t = \frac{30000}{6000} = 5\ sec$$

مثال رقم (14)

يبدأ صندوق كتلته 100 kg حركته من السكون على سطح أفقي أملس بتأثير قوة خارجية تساوي 150 N كما هو مبين في الشكل. أوجد بعد مرور زمن قدره 10 sec . ما يلي:

1. سرعة الصندوق . 2. رد فعل سطح الاستناد.



الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر الذي يضم جميع القوى المؤثرة في الصندوق كما هو مبين في الشكل . وبتطبيق معادلة الدفع وكمية الحركة مع ملاحظة أن الصندوق يتحرك فقط في الاتجاه الأفقي الموافق للمحور x :

$$\sum I_x = mv_2 - mv_1$$

وبالتعويض نحصل على سرعة الصندوق المطلوبة :

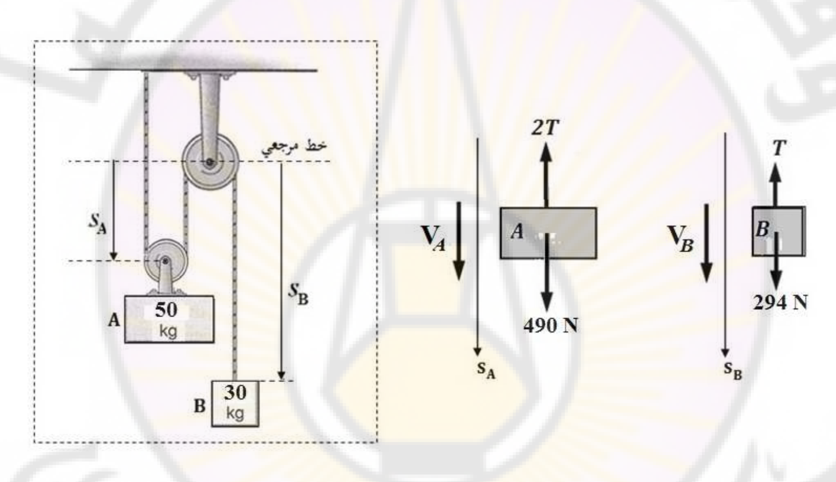
$$150\ cos\ 30°(10) = 100(v_2) - 0$$
$$v_2 = 13\ m/s$$

وبتطبيق معادلة الدفع وكمية الحركة في الاتجاه y نحصل على رد فعل سطح الاستناد :

$$\sum I_y = 0$$
$$(N_A - 980 - 150 \sin 30°)10 = 0$$
$$N_A = 1055\ N$$

مثال رقم (15)

تبدأ المجموعة الموضحة في الشكل حركتها من السكون . أوجد بعد مضي زمن قدره 5 sec سرعة كل من الكتلتين A وB وكذلك قوة الشد في الحبل .



الحل : ....

إنَّ العلاقة بين سرعتي الكتلتين A وB تكون على النحو الآتي :

$$2v_A + v_B = 0 \Rightarrow 2v_A = -v_B \qquad (1)$$

الكتلة A : بناء على مخطط الجسم الحر الموضح في الشكل ، وبتطبيق معادلة الدفع وكمية الحركة في اتجاه المحور الشاقولي y نجد :

$$+\downarrow \sum I_y = mv_2 - mv_1$$

وبالتعويض نحصل على :

$$(490 - 2T)(5) = 50v_A \qquad (2)$$

الكتلة B : بناء على مخطط الجسم الحر الموضح في الشكل ، وبتطبيق معادلة الدفع وكمية الحركة نجد :

$$+\downarrow \ \sum I_y = mv_2 - mv_1$$

وبالتعويض نحصل على :

$$(294 - T)(5) = 30v_{\mathrm{B}} \qquad (2)$$

ينتج بحل المعادلات الثلاث ما يلي :

$$T = 259\,N \ \ ; \quad v_{\mathrm{A}} = -2.9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}; \quad v_{\mathrm{B}} = 5.8\ \mathrm{m/s}$$

تشير إشارة السالب إلى أن الاتجاه الفعلي للسرعة $\mathbf{v}_{\mathrm{A}}$ بعكس تزايد s_{A} أي باتجاه الأعلى. وتدل الإشارة الموجبة للسرعة $\mathbf{v}_{\mathrm{B}}$ إلى أنَّ اتجاه هذه السرعة يوافق اتجاه تزايد s_{B} أي باتجاه الأسفل.

5–9 الاستطاعة والمردود (Power and Efficiency) :

الاستطاعة (Power) : الاستطاعة هي سرعة إنجاز العمل . أو بتعبير آخر ، هي المعدل الزمني لانجاز العمل . وكما هو معلوم ، هناك آلات تستطيع تنفيذ العمل الموكول إليها في فترة زمنية قصيرة ، وهناك آلات تحتاج فترة زمنية طويلة لتنفيذ العمل الموكول إليها. تتحدد الاستطاعة P الناتجة عن قوة ما $\boldsymbol{F}$ عندما تقوم بعمل بالعلاقة الآتية :

$$P = \frac{dU}{dt} = \boldsymbol{F}.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \qquad (25)$$

أي أن :

$$P = \boldsymbol{F}.\mathbf{v} \qquad (26)$$

حيث $\mathbf{v}$ هي سرعة النقطة التي تؤثر فيها القوة $\boldsymbol{F}$. من الواضح أن الاستطاعة هي مقدار عددي ، وتقدر في جملة الوحدات الدولية بوحدة الواط (W) ، وفي جملة الوحدات الانكليزية بوحدة الحصان (hp) . هذا مع العلم أن :

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{N.m/s}$$
$$1\ \mathrm{hp} = 746\ \mathrm{W} = 0.746\ \mathrm{kW} \qquad (27)$$

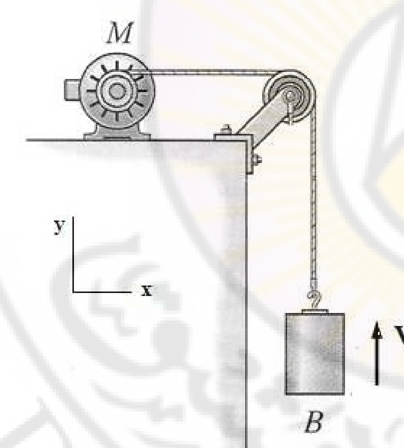
المردود (Efficiency) : المردود الميكانيكي لآلة ما : هو نسبة العمل المفيد إلى العمل المبذول عليها خلال الفترة الزمنية نفسها. أو بتعبير آخر ، هو نسبة استطاعة الخرج المفيدة (P_{out}) إلى استطاعة الدخل (P_{in}) التي تحتاجها الآلة . عندئذ يحسب المردود والذي يرمز له بالحرف η (Eta) بالعلاقة :

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \qquad (28)$$

إن المردود الميكانيكي دائماً أقل من الواحد لأن كل آلة تستهلك جزءاً من استطاعة الدخل للتغلب على قوى الاحتكاك المتولدة بين أجزائها المتحركة .

مثال رقم (16)

يقوم محرك كهربائي M برفع ثقل B كتلته m=25kg وذلك بمساعدة المجموعة الموضحة في الشكل . احسب في اللحظة التي تكون فيها سرعة الثقل 4 m/s وتسارعه $6m/s^2$ ما يلي :



1. قوة الشد T التي يولدها المحرك الكهربائي .
2. الاستطاعة المفيدة P_{out} اللازمة لرفع الثقل بالسرعة المذكورة .
3. الاستطاعة الكلية P_{in} المبذولة بوساطة هذا المحرك . مردود المحرك يساوي 0.75

الحل : ....

قوة الشد : لدينا : m=25 kg ; W=mg=25(9.8) =245 N

نرسم مخطط الجسم الحر للثقل ثم نطبق القانون الأساسي في التحريك في اتجاه المحور y الموافق لاتجاه حركة الثقل :

$$\sum F = ma$$

$$T - 245 = 25(6) \quad \Rightarrow T = 395\ N$$

الاستطاعة المفيدة P_{out} : تتعين هذه الاستطاعة بالعلاقة الآتية :

$$P_{out} = \boldsymbol{T}.\mathbf{v} = 395 \times 4 = 1580\ \text{W}$$

الاستطاعة المبذولة P_{in} : تتحدد استطاعة الدخل هذه بالعلاقة:

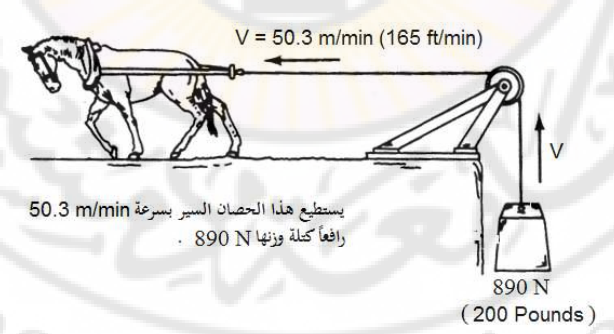
$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \implies P_{in} = \frac{1}{\eta}\ P_{out}$$

$$= \frac{1}{0.75}\ (1580) = 2107W$$

وباستخدام وحدة الحصان *(hp)* الانكليزية نجد :

$$P_{in} = \frac{2107}{746} = 2.82\ hp$$

ملاحظة : تقاس استطاعة المحرك في نظام الوحدات الانكليزي بوحدة الحصان (hp). وكما هو معلوم فإن العالم الانكليزي (J.Watt) هو الذي حدد قدرة هذا الحصان كما هو واضح في الشكل . واستناداً إلى معطيات هذا الشكل يمكن تعيين قدرة هذا الحصان باستخدام العلاقة الآتية :



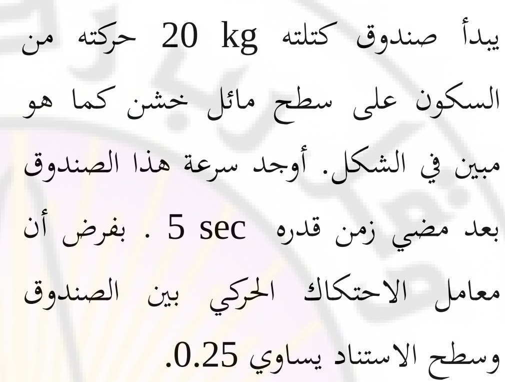
$$1\ hp = \frac{890 \times 50.3}{60} = 746\ (Watt) = 0.746\ kW$$

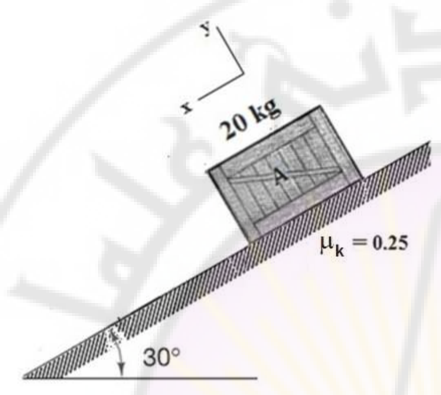
وبالمقابل نجد :

$$1\ kW = 1.34\ hp$$

مسائل غير محلولة
UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

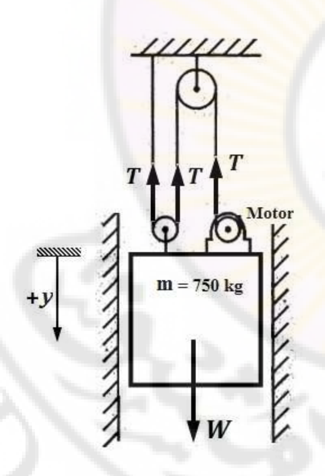




يبدأ صندوق كتلته 20 kg حركته من السكون على سطح مائل خشن كما هو مبين في الشكل. أوجد سرعة هذا الصندوق بعد مضي زمن قدره 5 sec . بفرض أن معامل الاحتكاك الحركي بين الصندوق وسطح الاستناد يساوي 0.25.

الجواب : $v = 13.88$ m/s

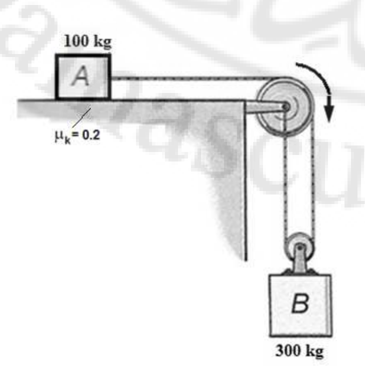
مسألة رقم (2) :



مصعد كهربائي كتلته 750kg يبدأ حركته من السكون للأسفل وبتسارع ثابت . إذا علمت أن هذا المصعد قد قطع مسافة مقدارها 30m خلال زمن 10sec . احسب تسارع المصعد وكذلك الشد في الكبل في أثناء هذه الحركة.

الجواب : $a = 0.6$ m/s^2 (↓) ; $T = 2300$ N

مسألة رقم (3) :



تبدأ المجموعة الموضحة في الشكل حركتها من السكون . أوجد تسارع كل من الكتلتين A وB وكذلك قوة الشد في الحبل .

الجواب : $a_B = 3.64$ m/s^2(↓) ; $T = 924$ N

$a_A = 7.28$ m/s^2(→) ;

الفصل العاشر

تحريك الأجسام الصلبة

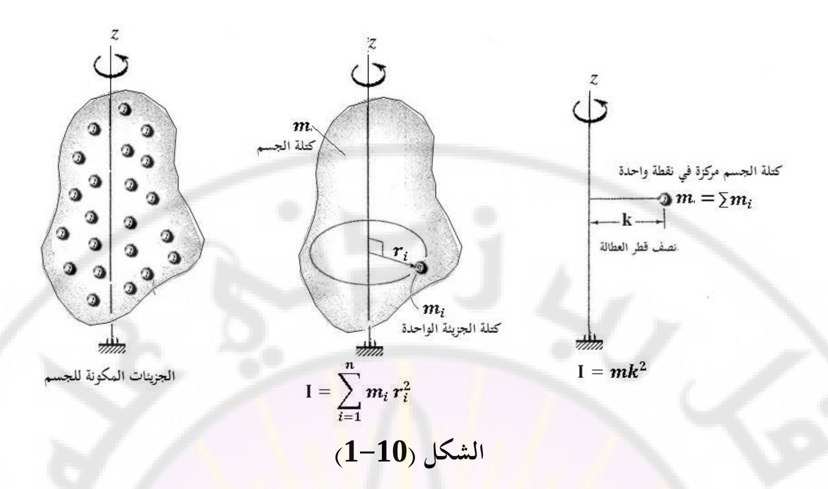
KINETICS OF RIGID BODIES

1–10 مفاهيم أساسية في التحريك (Basic Kinetic Concepts) :

تعتمد الدراسة التحريكية للأجسام الصلبة على مفهومين أساسيين ، الأول يدعى عزم العطالة والثاني يدعى مركز العطالة أو مركز كتلة الجسم .

1– عزم العطالة أو القصور الذاتي (Moment of Inertia) :

عندما يتحرك الجسم الصلب تحت تأثير مجموعة من القوى $\sum \mathbf{F}$ حركة انسحابية ، فإن حركته كما يدلنا على ذلك القانون الأساسي في التحريك $(\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a})$ ، تعتمد على كتلته الكلية m وعلى القوى المؤثرة فيه . وعندما يتحرك الجسم الصلب حركة دورانية تحت تأثير مجموعة من القوى عزمها الكلي $\sum \mathbf{M}$ ، فإن حركته تتعلق كما هو مبين في الشكل(10–1) ، علاوة على ما سبق ، بتوزيع كتل الجزيئات المكونة للجسم وذلك بالنسبة لمحور الدوران. ولهذا فإن دراسة الحركة لجسم يدور بتسارع زاوي $\boldsymbol{\alpha}$ ،كما سنرى فيما بعد ، سوف ترتكز على القانون الآتي : $\sum \mathbf{M} = I\,\boldsymbol{\alpha}$.حيث I هو عزم العطالة الكتلي للجسم أو اختصاراً عزم عطالة الجسم .



الشكل (1–10)

ومن الواضح أن عزم العطالة I يؤدي عند الحركة الدورانية للجسم نفس الدور الذي تؤديه الكتلة m في الحركة الانسحابية . هذا يعني أن الكتلة m هي مقياس درجة خمول الجسم وممانعته للحركة الانتقالية ، وبالمقابل فإن عزم العطالة I هو مقياس درجة خمول الجسم وممانعته للدوران .واستناداً إلى الشكل السابق ، فإن عزم العطالة لجسم حول محور ما يمثل المجموع الكلي لجداء كتلة كل جزيئة m_i في الجسم بمربع بعدها r_i عن هذا المحور . عندئذ يمكن أن نكتب :

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \int r_i^2 dm \qquad (1)$$

إن وحدة القياس الدولية لعزم العطالة هي $kg.m^2$. وعند القيام بحل المسائل فإن هذا العزم يحسب بإحدى الطريقتين الآتيتين:

- استخدام الجدول (1–10) الذي يعطي علاقات عزوم العطالة لبعض الأجسام الشائعة بالنسبة للمحاور الإحداثية . وتشمل : القرص الرقيق ، والصفيحة المستطيلة، ومتوازي المستطيلات، والكرة ، والاسطوانة ، والقضيب الرفيع .
- استخدام مفهوم نصف قطر العطالة (Radius of Gyration) وذلك بتطبيق العلاقة البسيطة الآتية :

$$I = mk^2 \qquad (2)$$

حيث k يمثل نصف قطر العطالة ، ويساوي هندسياً ، كما هو مبين في الشكل المذكور، بُعد محور الدوران عن النقطة التي يجب فيها تركيز كتلة كامل الجسم حتى يساوي عزم العطالة لهذه النقطة وحدها عزم العطالة لكل الجسم .

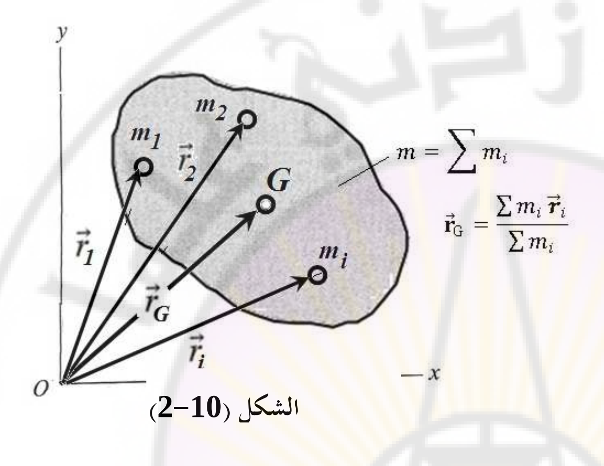
عزوم العطالة لبعض الاجسام الصلبة	
قرص دائري رقيق — Thin circular plate	$I_x = \frac{1}{2} mR^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mR^2$
صفيحة مستطيلة ورقيقة — Thin rectangular plate	$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + h^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mb^2$ $I_z = \frac{1}{12} mh^2$
متوازي مستطيلات — Rectangular prism	$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + h^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(b^2 + L^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(h^2 + L^2)$
كرة — Sphere	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mR^2$
أسطوانة دائرية — Circular cylinder	$I_x = \frac{1}{2} mR^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3R^2 + L^2)$
قضيب رفيع — Slender rod	$I_x = 0$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$

الجدول(10–1)

Damascus University

2– مركز كتلة الجسم (Centre of Mass) :

تقتصر الدراسة التحريكية للجسم الصلب ، في أكثر الحالات ، على دراسة حركة مركز كتلته G . فإذا نظرنا إلى الجسم الصلب على أنه جملة كبيرة من الجزيئات المتماسكة ، وافترضنا أن كل جزيئة من جزيئات هذا الجسم كتلتها تساوي m_i وتبعد بمقدار $\mathbf{r}_i$ عن نقطة ثابتة ملائمة كمبدأ الإحداثيات ، عندئذ يتحدد موضع مركز الكتلة G كما هو مبين في الشكل(2–10) بالعلاقة الآتية :



الشكل (2–10)

$$\vec{\mathbf{r}}_G = \frac{\sum m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i}{m} \Rightarrow \qquad (3)$$

$$m\vec{\mathbf{r}}_G = \sum m_i \vec{\mathbf{r}}_i$$

وبحساب المشتق الأول لهذه العلاقة ينتج :

$$m\vec{\mathbf{v}}_G = \sum m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

وبحساب المشتق الثاني لهذه العلاقة ينتج أيضا :

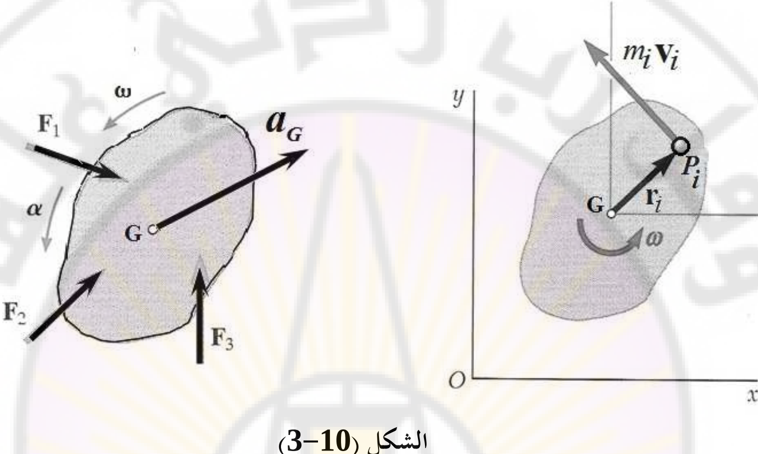
$$m\vec{\boldsymbol{a}}_G = \sum m_i \vec{\boldsymbol{a}}_i \qquad (4)$$

واعتماداً على هذه النتيجة ، وإذا رمزنا لمجموع القوى المؤثرة في جزيئات الجسم بالرمز $\sum \boldsymbol{F}_i$، فإننا نجد بتطبيق القانون الأساسي في التحريك على جزيئات هذا الجسم كلّها :

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}_i = \sum m_i \vec{\boldsymbol{a}}_i = m\vec{\boldsymbol{a}}_G \qquad (5)$$

2–10 المعادلات الأساسية في التحريك (Basic Kinetic Equations):

يظهر الشكل(10–3) جسماً صلباً يخضع لتأثير مجموعة من القوى الخارجية الواقعة في مستو واحد والتي تؤدي إلى تحريكه بسرعة زاوية مقدارها $\boldsymbol{\omega}$ وبتسارع زاوي مقداره $\boldsymbol{\alpha}$.



الشكل (10–3)

واستناداً إلى القانون الأساسي في التحريك وإلى العلاقة التي تربط بين مجموع عزوم القوى $\sum \boldsymbol{M}$ وعزم كمية الحركة $\boldsymbol{H}$ للجسم الصلب ، فإن معادلات التحريك يمكن أن تكتب على النحو :

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_G \qquad (6)$$

$$\sum \boldsymbol{M}_G = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{H}_G) \qquad (7)$$

حيث :

$\sum \boldsymbol{F}$– مجموع القوى الخارجية المؤثرة في الجسم .

m –كتلة الجسم .

$\boldsymbol{a}_G$ – تسارع مركز كتلة الجسم G.

$\sum \boldsymbol{M}_G$– مجموع عزوم القوى بالنسبة لمركز كتلة الجسم .

$\boldsymbol{H}_G$ – عزم كمية حركة الجسم بالنسبة لمركز كتلته G . ولاستنتاج معادلته ننظر إلى الجسم الصلب نظرة على أنه جملة كبيرة من الجزيئات المتماسكة عددها n ، فيتعين عندئذ عزم كمية الحركة للجسم كله كما هو موضح في الشكل(3-10) بالعلاقة :

$$\boldsymbol{H}_G = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r_i} \times m_i \mathbf{v}_{\boldsymbol{i}} \qquad (8)$$

حيث $\mathbf{r}_i$ هو شعاع الموضع لإحدى جزيئات الجسم ولتكن p_i ، و $\mathbf{V}_i$ شعاع سرعة تلك الجزيئة بالنسبة لمركز الكتلة G والتي تساوي $r_i\omega$. وبتطبيق خواص الجداء الشعاعي فإن ناتج هذه العلاقة هو شعاع عمودي على مستوي الحركة وله نفس جهة شعاع السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$. أي أن :

$$\boldsymbol{H}_G = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2\right) \boldsymbol{\omega}$$

نلاحظ هنا أن الحد الواقع بين القوسين هو في الحقيقة عزم عطالة الجسم الصلب بالنسبة للمحور المار من المركز G والعمودي على المستوي xy . لذا تصبح هذه العلاقة على النحو الآتي :

$$\boldsymbol{H}_G = I\boldsymbol{\omega} \qquad (9)$$

وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن ، وملاحظة أن مشتق السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$ هو التسارع الزاوي $\boldsymbol{\alpha}$ نجد أن :

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{H}_G) = I\boldsymbol{\alpha} \qquad (10)$$

وبتعويض هذه النتيجة المهمة في معادلة العزوم نحصل أخيراً على :

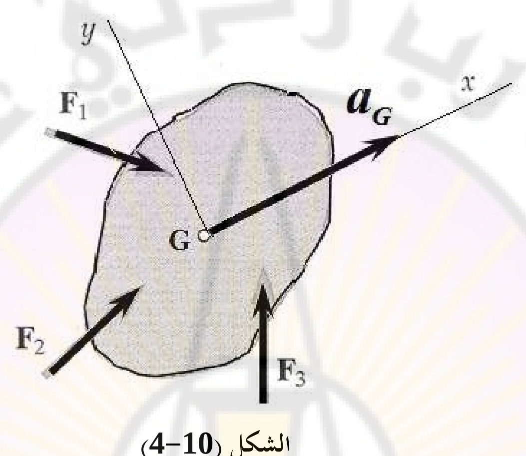
$$\sum \boldsymbol{M}_G = I\boldsymbol{\alpha} \qquad (11)$$

إن العلاقتين (6) و (11) هما المعادلتان الأساسيتان في دراسة تحريك الأجسام الصلبة .

Damascus University

المعادلات السُلّمية للحركة الانسحابية (Equations of Translation):

عندما تكون حركة الجسم الصلب انسحابية مستقيمة مثلاً ، تحت تأثير مجموعة من القوى الخارجية كما هو مبين في الشكل(4–10) ، فإن جميع نقاط الجسم سوف تتحرك بنفس التسارع بما في ذلك مركز كتلة الجسم G .



الشكل (**4–10**)

وفي هذه الحالة يكون التسارع الزاوي للجسم معدوماً ، وباستخدام جملة الإحداثيات الديكارتية المناسبة ، فإن معادلات التحريك تكتب على النحو الآتي :

$$\sum F_x = m(a_G)_x \; ; \; \sum F_y = m(a_G)_y \; ; \; \sum M_G = 0 \quad (12)$$

حيث :

$\sum F_x$– المجموع الجبري لمساقط القوى الخارجية في اتجاه المحور x .

$\sum F_y$– المجموع الجبري لمساقط القوى الخارجية في اتجاه المحور y .

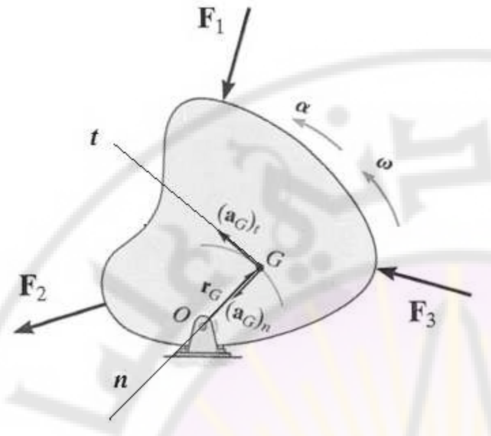
m –كتلة الجسم .

$(a_G)_x$ – مسقط تسارع مركز كتلة الجسم في اتجاه المحور x .

$(a_G)_y$ – مسقط تسارع مركز كتلة الجسم في اتجاه المحور y .

$\sum M_G$– مجموع عزوم القوى بالنسبة لمركز كتلة الجسم .

المعادلات السُلّمية للحركة الدورانية (Equations of Rotation):



عندما يدور الجسم الصلب حول محور ثابت يمر من النقطة O تحت تأثير مجموعة من القوى الخارجية كما هو مبين في الشكل(10–5) ، فإن جميع نقاط الجسم ترسم مسارات دائرية تقع مراكزها على محور الدوران الثابت. وباستخدام جملة إحداثيات مماسية وناظمية (t,n)، ثم تحليل تسارع مركز الكتلة G إلى

الشكل (10–5)

تسارعين الأول مماسي والآخر ناظمي ، فإن معادلات التحريك تكتب على النحو الآتي:

$$\sum F_t = m(a_G)_t = mr_G\alpha \qquad (13)$$

$$\sum F_n = m(a_G)_n = mr_G\omega^2 \qquad (14)$$

$$\sum M_G = I_G\alpha \qquad (15)$$

حيث :

$\sum F_t$– المجموع الجبري لمساقط القوى الخارجية في اتجاه المحور t .

$\sum F_n$– المجموع الجبري لمساقط القوى الخارجية في اتجاه المحور n .

m – كتلة الجسم .

$(a_G)_t$ – التسارع المماسي لمركز كتلة الجسم .

$(a_G)_n$ – التسارع الناظمي لمركز كتلة الجسم .

r_G – المسافة بين مركز الدوران O ومركز كتلة الجسم G .

ω– السرعة الزاوية للجسم .

$\alpha-$ التسارع الزاوي للجسم .

$\sum M_G-$ مجموع عزوم القوى بالنسبة لمركز كتلة الجسم . نشير هنا إلى أن إشارة العزم تكون موجبة إذا اتفقت مع الاتجاه المفترض للتسارع الزاوي α .

I_G – عزم عطالة الجسم بالنسبة لمحور عمودي على مستوي الحركة ويمر من مركز كتلة الجسم G .

معادلات الحركة المستوية العامة (Equations of Gneral Plane Motion):

عندما يتحرك الجسم الصلب حركة مستوية عامة (انسحابية ودورانية في آن واحد) تحت تأثير مجموعة من القوى الخارجية كما هو مبين في الشكل(6–10) ،فإننا نستطيع باستخدام جملة الإحداثيات الديكارتية المناسبة أن نكتب معادلات التحريك على النحو الآتي :

الشكل (6–10)

$$\sum F_x = m(a_G)_x ; \qquad (16)$$

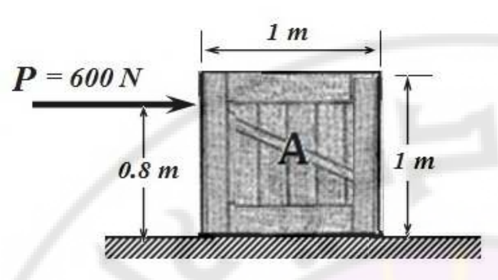
$$\sum F_y = m(a_G)_y ; \qquad (17)$$

$$\sum M_G = I_G\alpha \qquad (18)$$

Damascus University

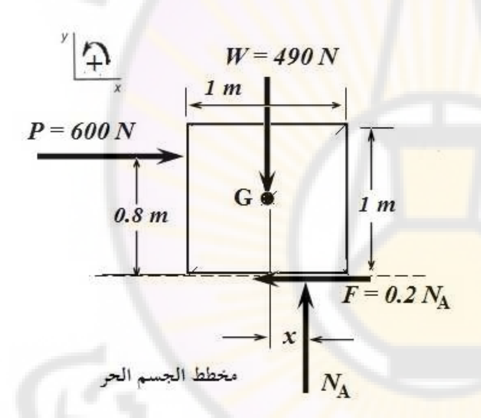
مثال رقم (17)

يرتكز صندوق متجانس كتلته 50 kg على سطح أفقي خشن كما هو مبين في الشكل.أوجد التسارع الذي يكتسبه هذا الصندوق نتيجة تأثير القوة الأفقية **P** . بفرض أن معامل الاحتكاك الحركي بين الصندوق وسطح الاستناد يساوي 0.2 .



الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر الذي يضم جميع القوى المؤثرة في الصندوق كما هو مبين في الشكل ، مع ملاحظة أن رد الفعل الناظمي $\mathbf{N}_A$ ليس بالضرورة أن يمر من مركز ثقل الصندوق G ، لأن شدة الضغط في منطقة التماس تكون أكبر في المقدمة مقارنة بالضغط في المؤخرة . وبتطبيق المعادلات الأساسية في التحريك نجد :



$$\sum F_x = m(a_G)_x \;\Rightarrow\; 600 - 0.2N_A = 50\,a_G \dots\dots (1)$$

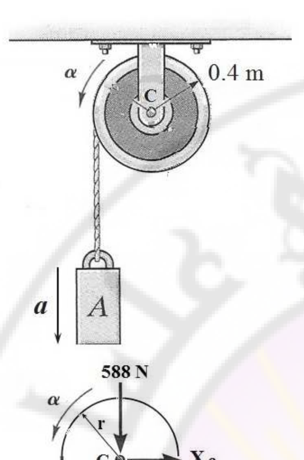
$$\sum F_y = m(a_G)_y \;\Rightarrow\; N_A - 490 = 0 \dots\dots (2)$$

$$\sum M_G = 0 \;\Rightarrow\; -600(0.3) + N_A(x) - 0.2N_A(0.5) = 0 \dots (3)$$

ينتج بحل هذه المعادلات الثلاث :

$$N_A = 490\,N$$
$$a_G = 10\,m/s^2$$
$$x = 0.47\,m$$

مثال رقم (18)



يبين الشكل المجاور بكرة كتلتها 60 kg ونصف قطر عطالتها k=0.25 m . يلتف على محيط هذه البكرة حبل في نهايته الحرة حمل كتلته 20 kg . أوجد التسارع الزاوي للبكرة عند هبوط الحمل .

الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر لكل من الحمل A والبكرة C كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب عزم عطالة البكرة كما يلي :

$$I_c = mk^2 = 60(0.25)^2$$
$$= 3.75 \ \ kg.m^2$$

ثم نطبق المعادلات الأساسية في التحريك على كل من البكرة والحمل فنجد :

$$\sum M_c = I_c\alpha \quad \Rightarrow \quad T(0.4) = 3.75(\alpha) \ldots\ldots (1)$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y \quad \Rightarrow \quad T - 196 = -20(a) \ldots\ldots (2)$$

وبالرجوع إلى علم الحركة (Kinematics) نستطيع أن نكتب العلاقة الآتية التي تربط بين التسارع الخطي a للحمل والتسارع الزاوي α للبكرة :

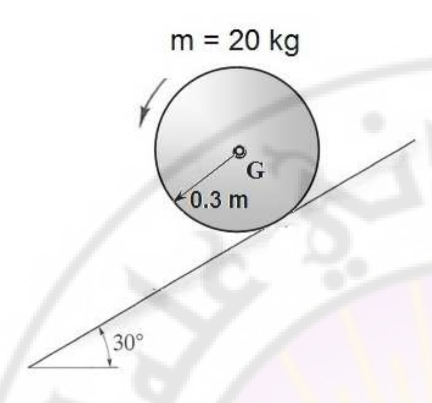
$$a = r\alpha \quad \Rightarrow \quad a = 0.4(\alpha) \ldots\ldots (3)$$

ينتج بحل هذه المعادلات الثلاث ما يلي :

$$T = 106\ N$$
$$a = 4.52\ m/s^2$$
$$\alpha = 11.3\ rad/s^2$$

Damascus University

مثال رقم (19)



يتدحرج قرص متجانس بلا انزلاق من أعلى مستوي مائل نحو أسفله كما هو مبين في الشكل المجاور . إذا كانت كتلة القرص تساوي 20 kg ونصف قطره 0.3 m ، فأوجد التسارع الزاوي للقرص وكذلك قوة الاحتكاك F.

الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر للقرص كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب عزم عطالة القرص كما يلي :

$$I_G = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2}(20)(0.3)^2$$
$$= 0.9 \ \ kg.m^2$$

مخطط الجسم الحر

وبتطبيق معادلات التحريك الخاصة بالحركة المستوية العامة (التدحرجية) على القرص نجد :

$$\sum F_x = m(a_G)_x \ \ \Rightarrow \ \ 196 \sin 30° - F = 20\ (a_G)$$
$$\sum M_G = I_G \alpha \ \ \Rightarrow F(0.3) = 0.9(\alpha)$$

نشير هنا إلى أن إشارة العزم تكون موجبة إذا اتفقت مع الاتجاه المفترض للتسارع الزاوي α . وبعد إصلاح هاتين المعادلتين نحصل على :

$$98 - F = 20(\ a_G) \qquad\qquad (1)$$
$$F = 3(\alpha) \qquad\qquad (2)$$

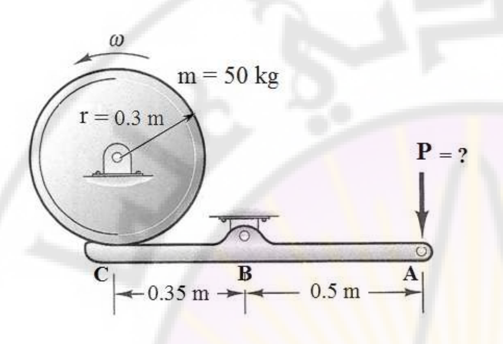
وبالرجوع إلى علم الحركة (Kinematics) نستطيع أن نكتب العلاقة الآتية :

$$a_G = r\alpha \quad \Rightarrow \quad a_G = 0.3(\alpha) \qquad\qquad (3)$$

ينتج بحل هذه المعادلات الثلاث ما يلي :

$$a_G = 3.27\ m/s^2$$
$$\alpha = 10.9\ rad/s^2$$
$$F = 32.67\ N$$

مثال رقم (20)



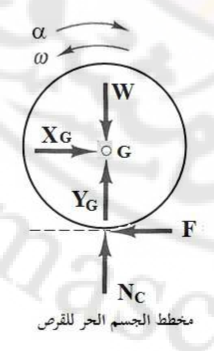
يدور قرص متجانس بسرعة زاوية مقدارها 10 rad/s كما هو مبين في الشكل المجاور . إذا كانت كتلة القرص تساوي 50 kg ، وكان معامل الاحتكاك الحركي بين القرص وذراع الكبح AC يساوي 0.4 ، فأوجد القوة **P** اللازم تطبيقها على ذراع الكبح لإيقاف هذا القرص في غضون ثانيتين.

الحل : ....

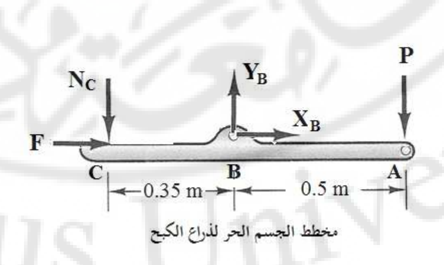
نرسم مخطط الجسم الحر لكل من القرص وذراع الكبح AC كما هو مبين في الشكل .

وبالرجوع إلى علم الحركة (Kinematics) نستطيع أن نكتب العلاقة الآتية :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad 0 = 10 + \alpha(2)$$
$$\alpha = -5\ rad/s^2$$



مخطط الجسم الحر للقرص



مخطط الجسم الحر لذراع الكبح

إشارة السالب تشير إلى أن اتجاه **α** يتفق مع اتجاه دوران عقارب الساعة كما هو موضح في الشكل . تتباطأ في هذه الحالة حركة القرص بشكل تدريجي حتى التوقف التام .

القرص : نحسب عزم عطالة القرص كما يلي :

$$I_G = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(50)(0.3)^2 = 2.25 \ kg.m^2$$

وبما أن حركة القرص دورانية ، إذن يمكن أن نطبق معادلة العزوم مع مراعاة أن عزم القوة يكون موجباً إذا كان متفقاً مع اتجاه التسارع الزاوي للقرص .

$$\sum M_G = I_G\alpha \ \Rightarrow F(0.3) = 2.25(5) \Rightarrow F = 37.5 \ N$$

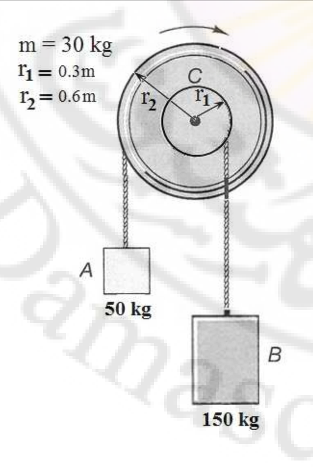
عندئذ تتعين قوة الضغط **Nc** التي يؤثر بها ذراع الكبح في القرص من خلال علاقة قوة الاحتكاك **F** كما يلي :

$$F = 0.4 \ N_C \Rightarrow N_C = \frac{37.5}{0.4} = 93.8 \ N$$

ذراع الكبح : نستطيع أن نكتب معادلة العزوم الآتية :

$$\sum M_B = O \ \Rightarrow N_C(0.35) - P(0.5) = 0$$
$$\Rightarrow P = 65.7 \ N$$

مثال رقم (21)

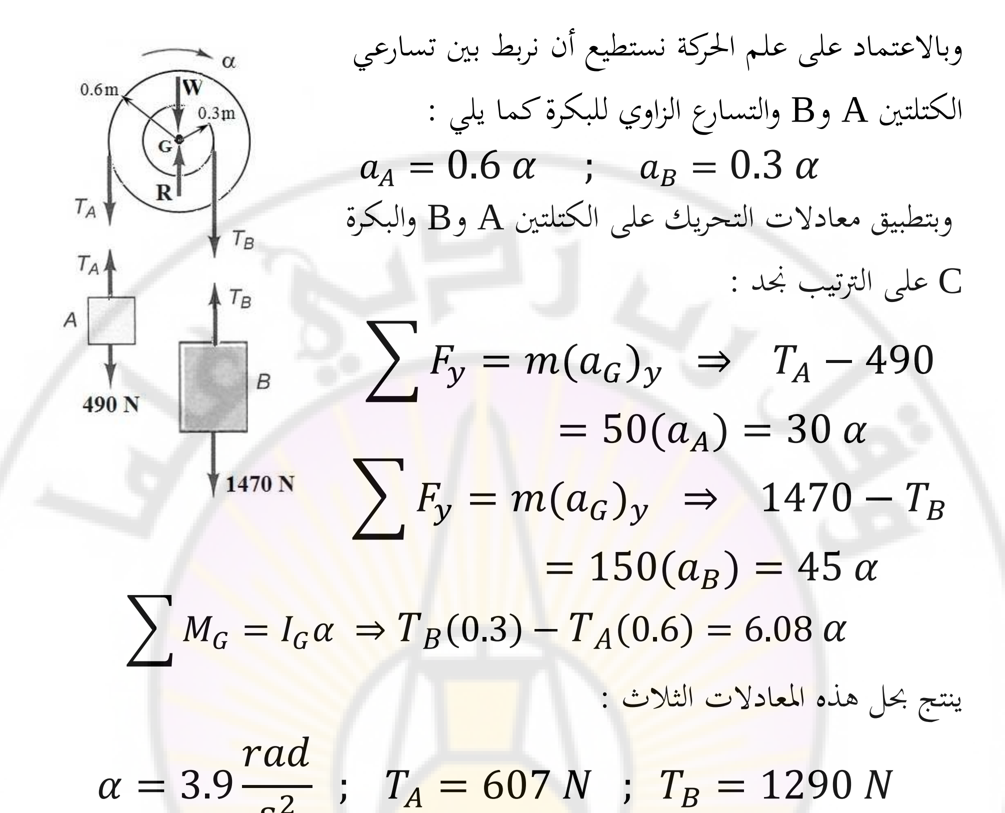


تبدأ المجموعة الموضحة حركتها في الاتجاه المبين في الشكل .إذا كان نصف قطر عطالة البكرة الثنائية k=0.45 m فأوجد التسارع الزاوي لهذه البكرة وكذلك قوة الشد المتولدة في كل حبل .

الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر لأجزاء الجملة الثلاثة كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب عزم عطالة البكرة كما يلي:

$$I_G = mk^2 = 30(0.45)^2 = 6.08 \ kg.m^2$$



وبالاعتماد على علم الحركة نستطيع أن نربط بين تسارعي الكتلتين A وB والتسارع الزاوي للبكرة كما يلي :

$$a_A = 0.6\,\alpha \quad ; \quad a_B = 0.3\,\alpha$$

وبتطبيق معادلات التحريك على الكتلتين A وB والبكرة C على الترتيب نجد :

$$\sum F_y = m(a_G)_y \;\Rightarrow\; T_A - 490 = 50(a_A) = 30\,\alpha$$

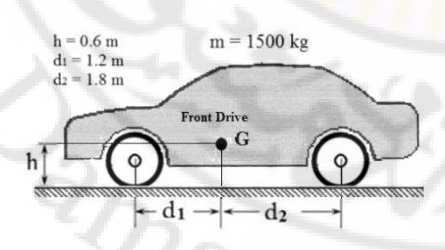
$$\sum F_y = m(a_G)_y \;\Rightarrow\; 1470 - T_B = 150(a_B) = 45\,\alpha$$

$$\sum M_G = I_G\alpha \;\Rightarrow T_B(0.3) - T_A(0.6) = 6.08\,\alpha$$

ينتج بحل هذه المعادلات الثلاث :

$$\alpha = 3.9\frac{rad}{s^2} \quad ; \quad T_A = 607\,N \quad ; \quad T_B = 1290\,N$$

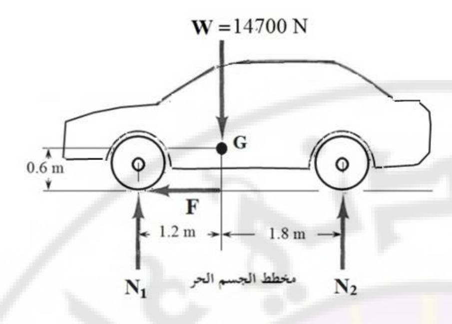
مثال رقم (22)



يبين الشكل المجاور سيارة كتلتها 1500 kg وذات دفع أمامي (أي إن العجلتين الأماميتين هما القائدتان). إذا تحركت هذه السيارة من السكون بتسارع ثابت واستطاعت في غضون 13.5 sec أن تصل إلى سرعة قدرها 27m/s. والمطلوب :

1. قوة الاحتكاك الضرورية لمنع الانزلاق وتحقيق التماسك مع الطريق.
2. رد الفعل الناظمي لسطح الطريق على كل من العجلتين الأماميتين والخلفيتين.

الحل : ....



نرسم مخطط الجسم الحر للسيارة كما هو مبين في الشكل. نلاحظ هنا أن قوة الاحتكاك **F** تؤثر في العجلتين الأماميتين فقط لأن السيارة ذات دفع أمامي. ثم نحسب تسارع السيارة بالاعتماد على علم الحركة كما يلي:

$$v = v_0 + at \;\Rightarrow\; 27 = 0 + a(13.5) \Rightarrow a = 2\,m/s^2$$

وبتطبيق معادلات التحريك مع ملاحظة أن حركة السيارة هي حركة انسحابية نجد :

$$\sum F_x = m(a_G)_x \;\Rightarrow\; F = 1500(2) = 3000\,N$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y \;\Rightarrow\; N_1 + N_2 - 14700 = 0$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow N_1(1.2) - N_2(1.8) + 3000(0.6) = 0$$

ينتج بحل هذه المعادلات الثلاث :

$$F = 3000\,N \;;\; N_1 = 8220\,N \;;\; N_2 = 6480\,N$$

3–10 مبدأ العمل والطاقة (Principle of Work and Energy) :

إن لمبدأ العمل والطاقة فائدة كبيرة عند الدراسة التحريكية للجسم الصلب ، لأننا نستطيع في هذه الحالة أن نصرف النظر عن حساب التسارع. ويستخدم هذا المبدأ عادة في حل المسائل التي نهتم فيها اهتماماً خاصاً بدراسة السرعة والانتقال. وتكتب العلاقة التي تعبّر عن هذا المبدأ على النحو الآتي :

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

يمثل الطرف الأيسر من هذه العبارة العمل الذي تقوم به القوى الخارجية المؤثرة في الجسم، أما الطرف الأيمن فيمثل تغير الطاقة الحركية للجسم في أثناء انتقاله من موضع لآخر .

وللحصول على الطاقة الحركية للجسم ، فإننا ننظر إليه على أنه جملة من الجزيئات المتماسكة ، ثم نحسب لكل جزيئة من هذه الجزيئات الطاقة الحركية T_i التي تكتسبها. وبجمع الطاقات الحركية العائدة لجزيئات الجسم نحصل على الطاقة الحركية T للجسم كله، أي أن :

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad (19)$$

حيث mi تمثل كتلة الجزيئة (i) ، وتمثل vi سرعتها . واعتماداً على هذه العلاقة نستطيع استنتاج العلاقات المستخدمة في حساب الطاقة الحركية في حالات الحركة الثلاث المبينة في الشكل(10-7) وتشمل :

- الانسحابية (Translation) .
- الدورانية (Rotation) .
- الحركة المستوية العامة (General Plane Motion) .

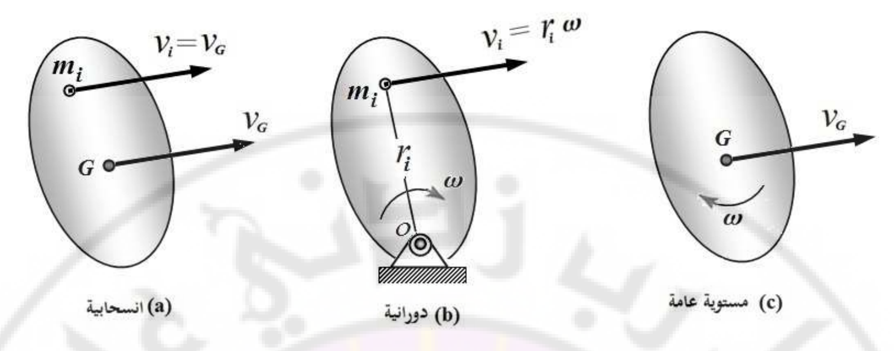
1. الحركة الانسحابية : عندما يتحرك جسم كتلته m حركة انسحابية ، فإن جميع الجزيئات المكونة له تتحرك بسرعات متساوية تساوي سرعة مركز كتله G .

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) v_G^2$$

وإذا لاحظنا أن المقدار المحصور بين قوسين هو الكتلة الكلية للجسم ، عندئذ نجد:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 \qquad (20)$$

وهكذا نستنتج أن الطاقة الحركية عند الحركة الانسحابية للجسم تساوي نصف جداء كتلته بمربع سرعة مركز كتله .



الشكل (**7–10**)

2. الحركة الدورانية : عندما يدور جسم حول محور ثابت بسرعة زاوية **ω** ، فإن كل جزيئة من جزيئاته ترسم دائرة نصف قطرها r_i ، وتتحرك على هذا المسار بسرعة ω r_i. وبتعويض قيمة هذه السرعة في العلاقة (1) ، فإننا نحصل على الطاقة الحركية للجسم في حالة الدوران :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2\right)\omega^2$$

وإذا لاحظنا أن المقدار المحصور بين القوسين هو عزم عطالة الجسم (I_0) بالنسبة لمحور الدوران المار من النقطة O ، عندئذ يمكن أن نكتب :

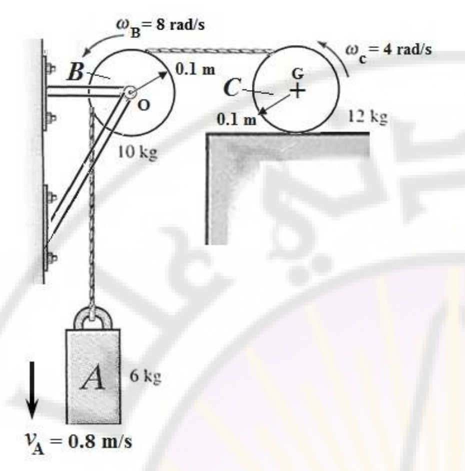
$$T = \frac{1}{2} I_o\, \omega^2 \qquad (21)$$

وهكذا نستنتج أن الطاقة الحركية عند الحركة الدورانية للجسم تساوي نصف جداء عزم العطالة بمربع سرعته الزاوية .

3. الحركة المستوية العامة : عندما يتحرك الجسم حركة مستوية عامة ، فإن الطاقة الحركية الكلية للجسم تساوي طاقة الحركة الانسحابية مضافاً إليها طاقة الحركة الناتجة عند دوران الجسم حول مركز كتلته . عندئذ يمكن أن نكتب :

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G\, \omega^2 \qquad (22)$$

مثال رقم (23)



يبين الشكل المجاور جملة مكونة من ثلاثة أجزاء وهي : الثقل A والبكرة B والاسطوانة C المتدحرجة بلا انزلاق. أوجد الطاقة الحركية الكلية لهذه الجملة وذلك في اللحظة التي تكون فيها سرعة الثقل الساقط 0.8 m/s .

الحل : ....

الثقل A : بما أن حركة هذا الجسم انسحابية فإن الطاقة الحركية تحسب كما يلي:

$$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2}(6)(0.8)^2 = 1.92 \text{ J}$$

البكرة B : يتعين عزم عطالة البكرة بالعلاقة :

$$I_o = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2}(10)(0.1)^2 = 0.05 \ \text{kg.m}^2$$

بما أن حركة هذا الجسم دورانية فإن الطاقة الحركية تحسب كما يلي:

$$T_B = \frac{1}{2} I_o \, \omega^2 = \frac{1}{2}(0.05)(8)^2 = 1.6 \text{ J}$$

الاسطوانة C : يتعين عزم عطالة هذه الاسطوانة وكذلك سرعة مركزها كما يلي:

$$I_G = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2}(12)(0.1)^2 = 0.06 \ \text{kg.m}^2$$

$$v_G = r\omega = (0.1)(4) = 0.4 \, m/s$$

وبما أن حركة هذا الجسم مستوية عامة (تدحرجية) فإن الطاقة الحركية تحسب كما يلي:

$$T_C = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G\, \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(12)(0.4)^2 + \frac{1}{2}(0.06)(4)^2 = 1.44\ \text{J}$$

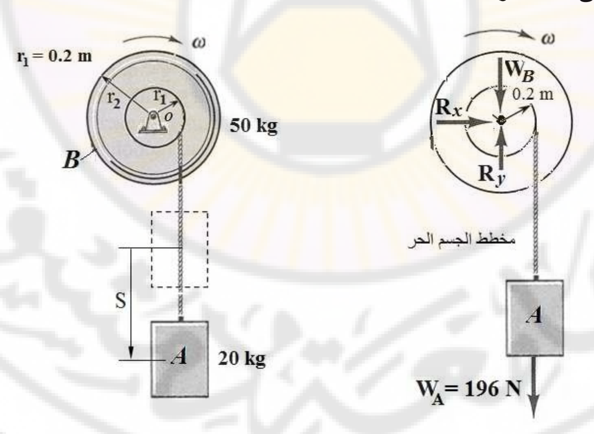
وبجمع الطاقات الحركية العائدة لأجزاء الجملة ، فإننا نحصل على الطاقة الحركية الكلية الآتية :

$$T = T_A + T_B + T_C$$

$$T = 1.92 + 1.6 + 1.44 = 4.96\ \text{J}$$

مثال رقم (24)

يبين الشكل المجاور بكرة كتلتها 50 kg ونصف قطر عطالتها k=0.28 m . يلتف على محيط هذه البكرة حبل في نهايته الحرة ثقل كتلته 20 kg . أوجد سرعة هذا الثقل وذلك عند هبوطه من السكون بمقدار 2 m.



الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر للجملة المكونة من الثقل والبكرة كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب عزم عطالة البكرة كما يلي :

$$I_o = mk^2 = 50(0.28)^2 = 3.92\ kg.m^2$$

الطاقة الحركية للجملة : نلاحظ أن الطاقة الحركية الابتدائية للجملة معدومة لأن الجملة بدأت حركتها من السكون . أما الطاقة الحركية النهائية لهذه الجملة فتتعين بالعلاقة:

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_o \, \omega^2$$

بالتعويض نجد أن :

$$T_2 = \frac{1}{2}(20) v_A^2 + \frac{1}{2}(3.92)\left(\frac{v_A}{0.2}\right)^2 = 59\, v_A^2$$

العمل : إن وزن الثقل هو القوة الوحيدة التي تقوم بعمل ، مقداره :

$$U_{1-2} = W_A(S) = (20)(9.8)(2) = 392\ \mathrm{J}$$

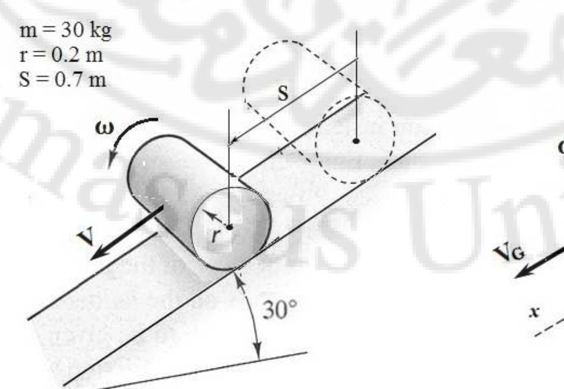
مبدأ العمل والطاقة : بتطبيق مبدأ العمل والطاقة نجد :

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$392 = 59\, v_A^2 \;\; \Rightarrow v_A = 2.58\, m/s$$

مثال رقم (25)

تتدحرج اسطوانة متجانسة من حالة السكون ، بلا انزلاق ، من أعلى مستوي مائل نحو أسفله كما هو مبين في الشكل المجاور . إذا كانت كتلة الاسطوانة تساوي 30 kg ونصف قطرها 0.2 m ، فأوجد السرعة الزاوية **ω** ، والسرعة الخطية **v** لهذه الاسطوانة ، وذلك لحظة هبوطها بمقدار s = 0.7 m .



مخطط الجسم الحر

الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر للاسطوانة كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب عزم عطالة الاسطوانة وكذلك نحدد سرعة مركزها G بدلالة سرعتها الزاوية كما يلي:

$$I_G = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(30)(0.2)^2 = 0.6 \ kg.m^2$$

$$v_G = r\omega = 0.2\omega$$

الطاقة الحركية للاسطوانة : نلاحظ أن الطاقة الحركية الابتدائية للاسطوانة معدومة لأن الاسطوانة بدأت حركتها من السكون . أما الطاقة الحركية النهائية لهذه الاسطوانة فتتعين بالعلاقة:

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G \ \omega^2$$

بالتعويض نجد أن :

$$T_2 = \frac{1}{2}(30)(0.2\omega)^2 + \frac{1}{2}(0.6)\omega^2 = 0.9 \ \omega^2$$

العمل : إذا حلّلنا قوة الوزن إلى مركبتين الأولى في اتجاه المحور x والثانية في اتجاه المحور y ، فإننا نلاحظ أن المركبة الأولى الموازية لسطح المستوي هي القوة الوحيدة التي تقوم بعمل مقداره :

$$U_{1-2} = 294 \sin 30° \, (S) = (294)(0.5)(0.7) = 103 \text{ J}$$

مبدأ العمل والطاقة : بتطبيق مبدأ العمل والطاقة نجد :

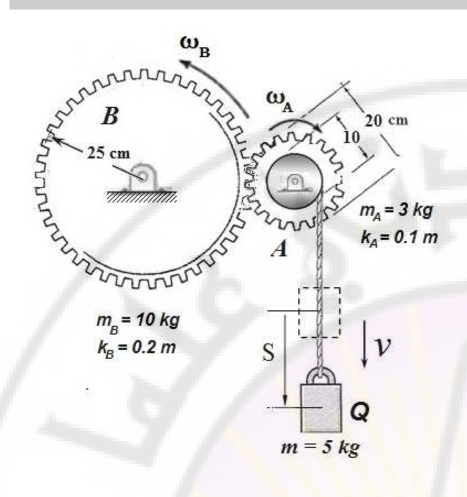
$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$103 = 0.9 \ \omega^2 \quad \Rightarrow \omega = 10.7 \ rad/s$$

واستناداً إلى هذه النتيجة نحسب سرعة الاسطوانة **V** المتمثلة بسرعة مركزها بالعلاقة :

$$v_G = 0.2\omega = (0.2)(10.7) = 2.14 \ m/s$$

مثال رقم (26)



تبدأ المجموعة الموضحة في الشكل حركتها من السكون .إذا كان نصف قطر عطالة المسنن A هي k_A=0.1 m ، ونصف قطر عطالة المسنن B هي k_B=0.2 m ، فأوجد سرعة الحمل Q ، والسرعة الزاوية لكل من المسننين، وذلك لحظة هبوط هذا الحمل مسافة مقدارها s = 2 m . جميع المعطيات مبينة في الشكل.

الحل : ....

نحسب أولاً عزم العطالة لكل من المسننين A و B استناداً إلى المعطيات المبينة في الشكل:

$$\mathrm{I}_A = m_A k_A^2 = 3(0.1)^2 = 0.03 \ \ kg.m^2$$
$$\mathrm{I}_B = m_B k_B^2 = 10(0.2)^2 = 0.4 \ \ kg.m^2$$

وترتبط السرعة الخطية v للحمل مع السرعة الزاوية ω_A للمسنن A بالعلاقة :

$$v = r\omega_A \Rightarrow \omega_A = \frac{v}{0.05} = 20v$$

وترتبط السرعة ω_B مع السرعة ω_A بالعلاقة :

$$r_A\omega_A = r_B\omega_B \Rightarrow \omega_B = 0.4\omega_A = 8v$$

الطاقة الحركية للجملة : نلاحظ أن الطاقة الحركية الابتدائية للجملة معدومة. أما الطاقة الحركية النهائية فتتعين بالعلاقة:

$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_A\,\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\,\omega_B^2$$

وبالتعويض نجد أن :

$$T_2 = \frac{1}{2}(5)v^2 + \frac{1}{2}(0.03)(20v)^2 + \frac{1}{2}(0.4)(8v)^2$$
$$= 21.3v^2$$

العمل : ينحصر عمل القوى المؤثرة في الجملة المتحركة بعمل قوة الوزن الخاصة بالحمل فقط . أي أن :

$$U_{1-2} = W(s) = (5)(9.8)(2) = 98 \text{ J}$$

مبدأ العمل والطاقة : بتطبيق مبدأ العمل والطاقة ينتج لدينا سرعة الحمل المطلوبة:

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$
$$98 = 21.3v^2 - 0 \quad \Rightarrow v = 2.15\, m/s$$

واستناداً إلى هذه النتيجة تكون السرعة الزاوية لكل من المسننين :

$$\omega_A = 20v = 20(2.15) = 43\, rad/s$$
$$\omega_B = 8v = 8(2.15) = 17.2\, rad/s$$

وهو المطلوب .

10–4 مبدأ الدفع وكمية الحركة (Principle of Impulse and Momentum):

يستخدم هذا المبدأ عادة في حل المسائل التي تهتم فيها اهتماماً مباشراً بدراسة السرعة والزمن. ونستطيع في هذه الحالة أن نصرف النظر عن حساب التسارع.

a) مبدأ الدفع الخطي وكمية الحركة الخطية :

للحصول على مبدأ الدفع الخطي وكمية الحركة الخطية للجسم الصلب ، فإننا نفترض جسما صلبا يخضع لتأثير مجموعة من القوى $\sum F$ وأن كتلة هذا الجسم m تقع في مركز كتلته G ، عندئذ نجد باستخدام القانون الأساسي الآتي في التحريك أن :

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_G = m\frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_G)$$

حيث $\mathbf{v}_G$ و $\boldsymbol{a}_G$ هما سرعة وتسارع مركز الكتلة G على الترتيب . وبضرب طرفي هذه المعادلة بالزمن dt ، ثم إجراء التكامل الرياضي في المجال الزمني الذي يمتد من اللحظة t_1 حتى اللحظة t_2 ، فإنه ينتج :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F}\ dt = m\mathbf{v}_{G_2} - m\mathbf{v}_{G_1} \qquad (23)$$

يدعى الطرف الأيسر من هذه المعادلة بالدفع الخطي لمحصلة القوى خلال الفترة الممتدة من t_1 حتى t_2 . أما الطرف الأيمن فهو التغير الطارئ على كمية الحركة الخطية في نفس الفترة الزمنية .ولهذا تسمى هذه المعادلة بمبدأ الدفع الخطي وكمية الحركة الخطية .

b) مبدأ الدفع الزاويّ وكمية الحركة الزاويّة:

يدعى عزم كمية الحركة حول أية نقطة (G مثلا) كمية الحركة الزاويّة . وللحصول على مبدأ الدفع الزاويّ وكمية الحركة الزاويّة للجسم الصلب، فإننا نستخدم معادلة العزوم في التحريك :

$$\sum \boldsymbol{M}_G = I_G\boldsymbol{\alpha} = I_G\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)$$

حيث :

$\sum \boldsymbol{M}_G$ – مجموع عزوم القوى بالنسبة لمركز كتلة الجسم.

I_G – عزم عطالة الجسم بالنسبة لمحور عمودي على مستوي الحركة ويمر من مركز كتلة الجسم G .

$\boldsymbol{\alpha}$ – التسارع الزاوي للجسم .

$\boldsymbol{\omega}$ – السرعة الزاوية للجسم .

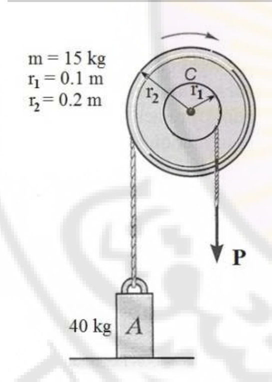
وبضرب طرفي هذه المعادلة بالزمن dt ، ثم إجراء التكامل الرياضي في المجال الزمني الذي يمتد من اللحظة t_1 حتى اللحظة t_2 ، فإنه ينتج :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{M}_G \; dt = I_G \boldsymbol{\omega}_2 - I_G \boldsymbol{\omega}_1 \qquad (24)$$

يدعى الطرف الأيسر من هذه المعادلة بالدفع الزاويّ للقوى حول المحور المار من مركز الكتلة G خلال الفترة الزمنية من t_1 إلى t_2 . أما الطرف الأيمن فهو التغير الطارئ على كمية الحركة الزاويّة في نفس الفترة الزمنية .ولهذا تسمى هذه المعادلة بمبدأ الدفع الزاويّ وكمية الحركة الزاويّة.

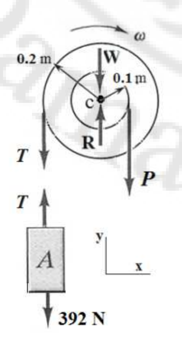
توضح الأمثلة الآتية كيفية استخدام طريقة الدفع وكمية الحركة في حل مسائل الجسم الصلب ، وذلك في الأنواع الثلاثة من الحركة : الانسحابية ، والدورانية ، والمستوية العامة.

مثال رقم (27)



يبين الشكل المجاور بكرة ثنائية كتلتها 15 kg ونصف قطر عطالتها k=0.1 m . يلتف على محيط هذه البكرة حبل في نهايته الحرة حمل كتلته 40 kg . أوجد القوة $\boldsymbol{P}$ التي تؤدي إلى رفع الحمل بسرعة قدرها 4 m/s بعد مرور ثلاث ثوان على بدء الحركة من السكون .

الحل : ....



نرسم مخطط الجسم الحر لكل من الحمل A والبكرة C، ثم نحسب عزم عطالة البكرة وكذلك سرعتها الزاوية كما يلي :

$$\mathrm{I}_c = mk^2 = 15(0.1)^2$$
$$= 0.15 \;\; kg.m^2$$
$$v = r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{4}{0.2} = 20 \, rad/s$$

ثم نطبق مبدأ الدفع وكمية الحركة على كل من البكرة والحمل.

الحمل : بما أن حركته انسحابية ، إذن نستخدم المعادلة الآتية:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum F\,dt = m\mathrm{v}_2 - m\mathrm{v}_1$$

وبالتعويض ينتج أن :

$$(\mathrm{T} - 392)(3) = 40(4) - 40(0) \Rightarrow \mathrm{T} = 445\ \mathrm{N}$$

البكرة : بما أن حركتها دورانية ، إذن نستخدم المعادلة الآتية:

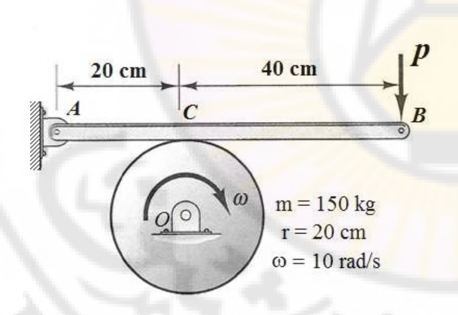
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_c\,dt = I\omega_2 - I\omega_1$$

وبالتعويض ينتج أن :

$$(\mathrm{P} \times 0.1 - \mathrm{T} \times 0.2)(3) = 0.15(20) \Rightarrow \mathrm{P} = 900\ \mathrm{N}$$

مثال رقم (28)

يدور قرص متجانس بسرعة زاوية مقدارها 10 rad/s كما هو مبين في الشكل المجاور . إذا كانت كتلة القرص تساوي 150 kg ، وكان معامل الاحتكاك الحركي بين القرص وذراع الكبح AB يساوي 0.2 ، فأوجد القوة **P** اللازم تطبيقها على ذراع الكبح لإيقاف هذا القرص في غضون ثانيتين.

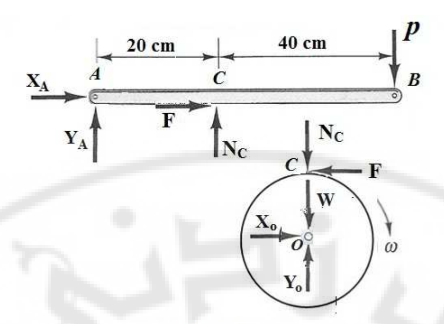


الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر لكل من القرص وذراع الكبح AB كما هو مبين في الشكل .

ثم نحسب عزم عطالة القرص كما يلي :

$$\mathrm{I}_G = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(150)(0.2)^2 = 3\ \ kg.m^2$$



القرص : بما أن حركة القرص دورانية ، إذن يمكن أن نطبق معادلة الدفع الزاوي وكمية الحركة مع مراعاة أن عزم القوة يكون موجباً إذا كان متفقاً مع اتجاه السرعة الزاوية للقرص.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_o \, dt = I\omega_2 - I\omega_1$$

وبالتعويض ينتج لدينا قوة الاحتكاك :

$$(-F)(0.2)(2) = 0 - 3(10) \Rightarrow F = 75 \text{ N}$$

عندئذ تتعين قوة الضغط Nc التي يؤثر بها ذراع الكبح في القرص كما يلي :

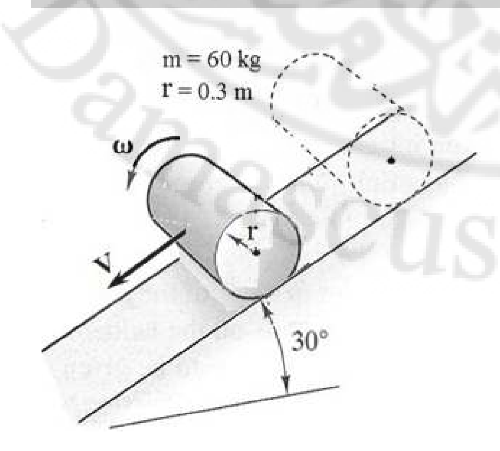
$$F = 0.2\, N_C \Rightarrow N_C = \frac{75}{0.2} = 375\, N$$

ذراع الكبح : وبما أن هذا الذراع في حالة توازن ، إذن يمكن أن نكتب :

$$\sum M_A = O \;\Rightarrow N_C(0.2) - P(0.6) = 0 \Rightarrow P = 125\, N$$

مثال رقم (29)

تتدحرج اسطوانة متجانسة من حالة السكون ، بلا انزلاق ، من أعلى مستوي مائل نحو أسفله كما هو مبين في الشكل المجاور . إذا كانت كتلة الاسطوانة تساوي 60 kg ونصف قطرها 0.3 m ، فأوجد السرعة الزاوية **ω** ، والسرعة الخطية **v** لهذه



الاسطوانة ، وذلك بعد مضي ثانية واحدة على بدء الحركة .

الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر للاسطوانة كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب عزم عطالة الاسطوانة وكذلك نحدد سرعة مركزها G بدلالة سرعتها الزاوية كما يلي:

$$I_G = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(60)(0.3)^2 = 2.7 \ kg.m^2$$

$$v_G = r\omega = 0.3\omega$$

وبتطبيق مبدأ الدفع الخطي وكمية الحركة على الاسطوانة نجد :

W=588 N
y
ω
30°
G
0.3 m
V_G
F
N
x
مخطط الجسم الحر

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum F\,dt = mv_2 - mv_1$$

وبالتعويض ينتج أن :

$$(588\sin 30° - F)(1) = 60(v) - 0$$

$$294 - F = 60(0.3\omega) = 18(\omega)$$

$$294 - F = 18(\omega) \ldots\ldots\ldots (a)$$

وبتطبيق مبدأ الدفع الزاوي وكمية الحركة على الاسطوانة أيضاً نجد :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_G\,dt = I\omega_2 - I\omega_1$$

$$\Rightarrow (F \times r)(t) = I(\omega) - 0$$

وبالتعويض ينتج :

$$0.3F = 2.7(\omega) \ \ldots\ldots\ldots (b)$$

وبحل المعادلتين (a) و(b)نحصل على :

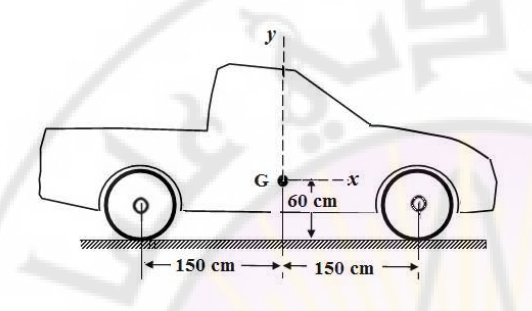
$$\omega = 10.9 \text{ rad/s}$$

$$v_G = r\omega = 0.3(10.9) = 3.27 \ m/s$$

مسائل غير محلولة

UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

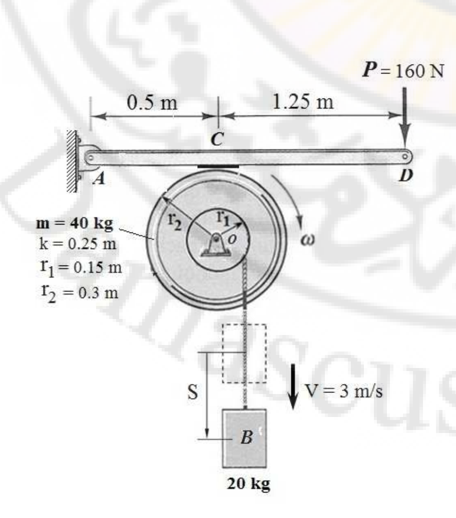


يبين الشكل المجاور سيارة كتلتها 1200 kg وذات دفع خلفي (أي إن العجلتين الخلفيتين هما القائدتان). إذا تحركت هذه السيارة من السكون بتسارع ثابت مقداره $2.5 m/s^2$ ، فأوجد عندئذ ما يلي :

1. قوة الاحتكاك F الضرورية لمنع الانزلاق وتحقيق التماسك مع الطريق.
2. رد الفعل الناظمي لسطح الطريق على العجلتين الأماميتين $(N_1=?)$.
3. رد الفعل الناظمي لسطح الطريق على العجلتين الخلفيتين $(N_2=?)$.

الجواب : $F = 3000$ N ; $N_1 = 5280$ N ; $N_2 = 6480$ N

مسألة رقم (2) :



يتحرك حمل كتلته 20 kg للأسفل بمساعدة الاسطوانة المتدرجة المبينة في الشكل. إذا كانت سرعة هذا الحمل 3 m/s لحظة تطبيق قوة الكبح **p** ، فأوجد المسافة S التي يقطعها هذا الحمل من لحظة تطبيق هذه القوة حتى التوقف التام عن الحركة . بفرض أن معامل الاحتكاك الحركي بين الاسطوانة وذراع الكبح AD يساوي 0.5 .

الجواب : $S = 2.89$ m

الفصل الحادي عشر

تطـــبيقات خـــاصَّة

SPECIAL APPLICATIONS

إن دراسة التصادم تُعَدُّ من أهم التطبيقات الهندسية على مبدأ انحفاظ كمية الحركة، كما أن دراسة الاهتزازات وحركة الأقمار الصناعية من أهم التطبيقات على القانون الأساسي في التحريك.

1-11 التصادم (Impact) :

التصادم هو حادثة اصطدام بين جسمين متحركين تتولد خلاله قوى فعل ورد فعل ذات مقادير كبيرة جداً في مجال زمني قصير جداً. لنتأمل في الشكل(1-11) الذي يبين اصطدام سيارتين ، وزناهما $\mathbf{W_1}$ و$\mathbf{W_2}$ ، تتحركان قبل الاصطدام بسرعتين $\mathbf{v_1}$ و $\mathbf{v_2}$ ولنفترض بأنّ هاتين السرعتين موجبتين إذا كانتا في الاتجاه الموجب لمحور الإحداثيات x .

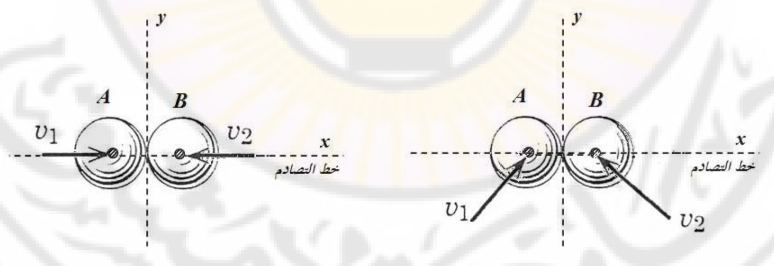
ومن مخطط الجسم الحر لكل من السيارتين نلاحظ أنه في أثناء الاصطدام تتولد عند نقطة التماس قوتان $\mathbf{R}$ داخليتان متساويتان ومتعاكستان. وبما أن هاتين القوتين شديدتان للغاية، لذا نستطيع في هذه الحالة إهمال تأثير جميع القوى الخارجية ، ومن ثم تطبيق مبدأ انحفاظ كمية الحركة على الجملة المكونة من السيارتين معاً .



الشكل (1–11)

ولدراسة التصادم يجري تصنيفه كما موضح في الشكل(2–11) إلى :

- تصادم مباشر (Direct impact) : يحدث هذا النوع إذا كانت السرعتان الابتدائيتان للجسمين المتصادمين محمولتين على الخط الواصل بين مركزي هذين الجسمين . ويسمى هذا الخط بخط التصادم .
- تصادم مائل (Indirect impact) : يحدث هذا النوع إذا كانت السرعتان الابتدائيتان للجسمين المتصادمين غير محمولتين على خط التصادم .



الشكل (2–11)

التصادم المباشر بين جسمين :

لدراسة هذا النوع من التصادم نفترض كما هو مبين في الشكل (3–11)كرتين متجانستين ، تتحركان على امتداد خط مستقيم بسرعتين ابتدائيتين معلومتين v_1 و v_2 . إذا كانت سرعة الكرة الأولى أكبر من سرعة الكرة الثانية ، فإنّ الكرة الأولى سوف تقترب شيئاً فشيئاً من الثانية حتى يحدث التصادم بينهما .

$v_1 > v_2$ قبل التصادم

v_0 عند حدوث التصادم

$u_1 < u_2$ بعد التصادم

الشكل (3–11)

في بداية حدوث الاصطدام تتحرك الكرتان بنفس السرعة ولتكن u ، ثم تنفصل الكرتان عن بعضهما بسرعتين نهائيتين مجهولتين . وعندما ندرس الكرتين لحظة التصادم كجسم واحد ، فإنّ جميع القوى الخارجية تصبح معدومة . ولهذا تكون كمية الحركة للكرتين ثابتة، وعندئذ يمكن أن نكتب المعادلة الآتية :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad (1)$$

حيث تمثل m_1 و m_2 كتلتي الكرتين ، وترمز u_1 و u_2 الى سرعتي الكرتين النهائيتين بعد حدوث التصادم . يدعى الفرق بين سرعتي الكرتين الابتدائيتين بسرعة الاقتراب ، ويدعى الفرق بين السرعتين النهائيتين بسرعة الانفصال ، كما تدعى نسبة سرعة الاقتراب إلى سرعة الانفصال بمعامل الارتداد (Coefficient of restitution) ، ويرمز له بالحرف (e) وتكتب معادلته على النحو الآتي :

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \qquad (2)$$

ويتعين معامل الارتداد تجريبيا ، وتقع قيمته بين الصفر والواحد ، وتتوقف قيمته على عدة عوامل أهمها نوع المادة المصنوع منها الجسمين المتصادمين . وينتج عموماً بالحل المشترك للمعادلتين السابقتين مقدار كل من السرعتين النهائيتين . والجدير بالإشارة إلى أنَّ هناك حالتين مهمتين للتصادم وهما :

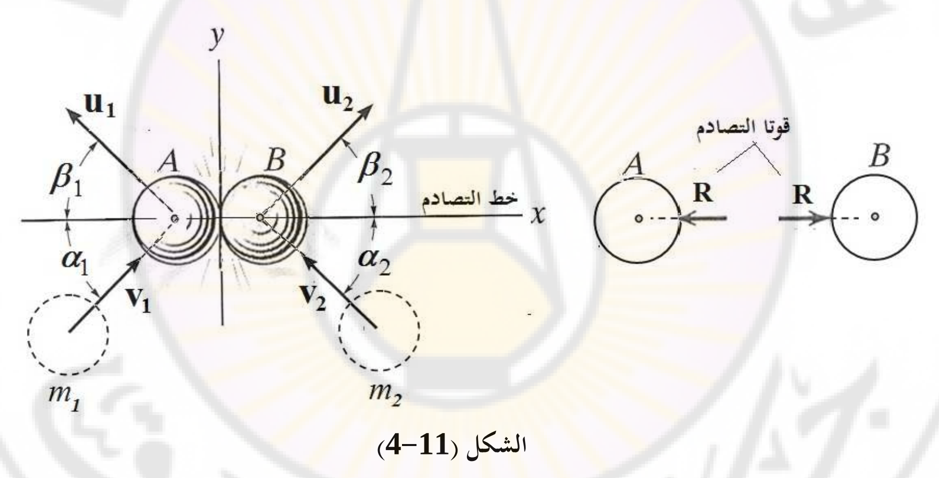
a) التصادم منعدم المرونة (Inelastic impact) : في هذه الحالة يكون $e = 0$ ، ويتحرك عندئذ كلا الجسمين بعد التصادم بسرعة واحدة u تتعين من العلاقة الآتية:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u \qquad (3)$$

b) التصادم مطلق المرونة (Elastic impact) : في هذه الحالة يكون e = 1 ، ويتبادل عندئذ الجسمان المتساويان في الكتلة سرعاتهما عند تصادمهما تصادماً مطلق المرونة.

التصادم المائل بين جسمين :

يوضح الشكل(11–4) مثالاً بسيطاً على هذا النوع من التصادم . فإذا افترضنا أن الكرتين A و B تتحركان قبل الاصطدام بسرعتين $\mathbf{v_1}$ و $\mathbf{v_2}$ معلومتين قيمة واتجاها ، وأنّ المطلوب هو تعيين سرعتي الكرتين $\mathbf{u_1}$ و $\mathbf{u_2}$ قيمة واتجاهاً بعد الاصطدام مباشرة .



الشكل (11–4)

لاستنتاج المعادلات الضرورية نقوم باتباع الخطوات الآتية :

1. نختار جملة الإحداثيات (x,y) بحيث ينطبق المحور x على خط التصادم ، ويمر المحور y من نقطة التماس بين الجسمين المتصادمين . ثم نحدد مساقط السرعات على محوري الإحداثيات وذلك على النحو الآتي :

$$(v_1)_x \ ; \ (v_2)_x \ ; \ (u_1)_x \ ; \ (u_2)_x$$

2. نطبق مبدأ انحفاظ كمية الحركة على الكرتين معاً في اتجاه المحور x فنحصل على:

$$m_1(v_1)_x + m_2(v_2)_x = m_1(u_1)_x + m_2(u_2)_x \qquad (4)$$

3. نطبق مبدأ انحفاظ كمية الحركة ، بصورة مستقلة ، على كل من الكرتين في اتجاه المحور y فنحصل على:

$$m_1(v_1)_y = m_1(u_1)_y \qquad (5)$$

$$m_2(v_2)_y = m_2(u_2)_y \qquad (6)$$

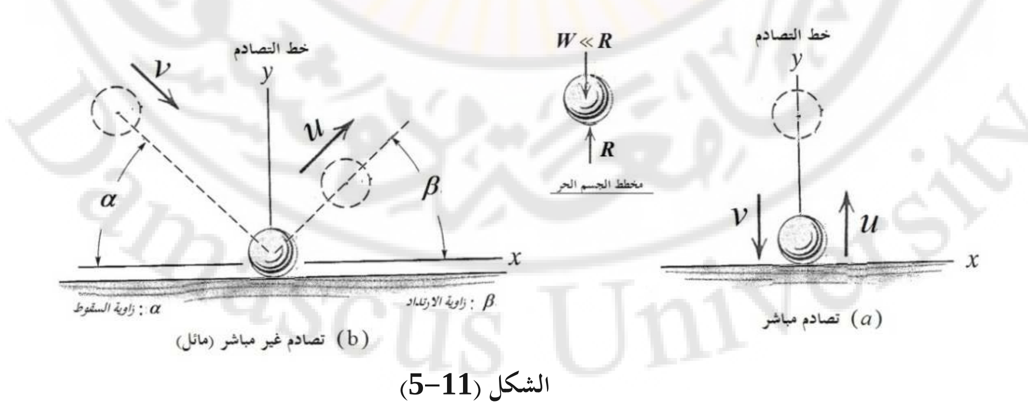
4. نعين معامل الارتداد (e) والذي يساوي إلى مسقط سرعة الانفصال على خط التصادم مقسوماً على مسقط سرعة الاقتراب على نفس الخط . أي أن :

$$e = \frac{(u_2)_x - (u_1)_x}{(v_1)_x - (v_2)_x} \qquad (7)$$

وباستخدام المعادلات الأربع الناتجة يمكن بسهولة حساب القيم المجهولة الآتية: $u_1, u_2, \beta_1, \beta_2$.

التصادم بين جسم وسطح ثابت :

يوضح الشكل(5-11) حالتي التصادم المباشر والمائل بين كرة وسطح أفقي ثابت .



الشكل (5-11)

لنبدأ أولاً بدراسة التصادم المباشر . فإذا افترضنا أن سرعة الكرة v في بداية الاصطدام المباشر معلومة ، وأنّ المطلوب هو تعيين سرعة الكرة u بعد الاصطدام مباشرة . يمكن حل هذه المسألة باستخدام علاقة معامل الارتداد (e) والتي تكتب على النحو الآتي :

$$e = \frac{u}{v} \qquad (8)$$

ومن الملاحظات المهمة أنه عندما يسقط جسم سقوطاً حراً من ارتفاع h على سطح الأرض ، فإنّ سرعة ذلك الجسم في بداية الاصطدام بالأرض تحسب بالعلاقة :

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (9)$$

ولدراسة التصادم المائل المبين في الشكل المذكور آنفاً . نفترض أن سرعة الكرة **v** في بداية الاصطدام معلومة قيمة واتجاهاً ، وأنّ المطلوب هو تعيين سرعة الكرة **u** قيمة واتجاهاً بعد الاصطدام مباشرة . لحل هذه المسألة يتطلب الأمر ما يلي :

1. تطبيق مبدأ انحفاظ كمية الحركة في الاتجاه الأفقي x وذلك بسبب انعدام القوى الخارجية في ذلك الاتجاه ، كما يبين ذلك مخطط الجسم الحر ، لذا نكتب :

$$mv_x = mu_x \;\; \Rightarrow v\cos\alpha = u\cos\beta \qquad (9)$$

حيث تمثل α زاوية السقوط ، وتمثل β زاوية الارتداد . تبين هذه العلاقة أن مسقطي السرعتين الابتدائية والنهائية متساويان في الاتجاه العمودي على خط التصادم .

2. تطبيق معادلة معامل الارتداد ، بعد ملاحظة أن سرعة الانفصال تمثل مسقط السرعة النهائية على خط التصادم ، وأنّ سرعة الاقتراب تمثل مسقط سرعة الابتدائية على نفس الخط ، لذلك نكتب :

$$e = \frac{u\,sin\,\beta}{v\,sin\,\alpha} \qquad (10)$$

وهكذا ، يمكن باستخدام المعادلتين الناتجتين حساب قيمة السرعة المجهولة وكذلك زاوية ميلها بالنسبة للمحور x .

مثال رقم (30)

احسب سرعتي الاسطوانتين A وB المبينتين في الشكل بعد التصادم . إذا علمت أنّ العمود الذي تتحرك عليه الاسطوانتان عديم الاحتكاك ، وأنّ معامل الارتداد e = 0.6 .

$v_1 = 7$ m/s $v_2 = 5$ m/s

A   B

$m_1 = 2$ kg $m_2 = 3$ kg

الحل : ....

نفرض أنّ الجهة الموجبة للسرعة نحو اليمين ، ثم نقوم بتطبيق مبدأ انحفاظ كمية الحركة على الاسطوانتين معاً :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

وبالتعويض نجد :

$$2(7) + 3(-5) = 2u_1 + 3u_2$$

$$2u_1 + 3u_2 = -1 \qquad (a)$$

وباستخدام معادلة معامل الارتداد ثم التعويض نجد :

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \Rightarrow u_2 - u_1 = e(v_1 - v_2)$$

$$u_2 - u_1 = 0.6[7 - (-5)]$$

$$u_2 - u_1 = 7.2 \qquad (b)$$

بحل جملة المعادلتين (a) و (b) نحصل على السرعتين المطلوبتين :

$$u_1 = -4.52\, m/s \quad ; \quad u_2 = 2.68\, m/s$$

تشير النتيجة إلى أن الاسطوانة A سوف تتحرك بعد التصادم نحو اليسار ، وتتحرك الاسطوانة B نحو اليمين .

11–2 الاهتزازات الميكانيكية (Mechanical Vibrations) :

احتلت دراسة الاهتزازات مكانة هامة في السنوات الأخيرة وذلك نتيجة الحاجة إلى آلات سريعة وخفيفة تؤدي عملها بلا ضجيج . إن الاهتزاز بالتعريف هو حركة يقوم بها الجسم حول وضع توازنه الساكن . وتنقسم الاهتزازات الميكانيكية عموماً إلى نوعين :

1. اهتزازات حرة (Free vibrations) : وهي اهتزازات ذاتية يقوم بها الجسم عندما يقع تحت تأثير اضطراب عارض يبعده عن وضع توازنه الساكن . مثال على ذلك الحركة الاهتزازية لأرجوحة وذلك بعد إزاحتها عن وضع توازنها ثم تركها حرة تتأرجح حول ذلك الوضع. وتنقسم الاهتزازات الحرة بدورها إلى نوعين :
   - اهتزازات حرة غير متخامدة (Undamped free vibrations)
   - اهتزازات حرة متخامدة (Damped free vibrations)
2. اهتزازات قسرية (Forced vibrations) : وهي اهتزازات يتعرض لها الجسم تحت تأثير الآتي :

a) قوى خارجية يتكرر تأثيرها بشكل دوري . مثال على ذلك شخص يقوم بدفع أرجوحة بقوة ما كلما عادت إليه .

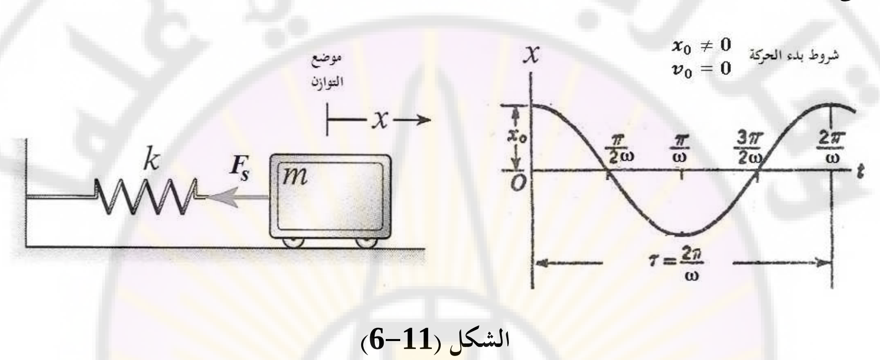
b) قوى داخلية تتولد بشكل دوري بسبب وجود عناصر دوارة غير متوازنة. من الأمثلة على ذلك : المحركات والمراوح الكهربائية عندما تكون عناصرها الدوارة غير متوازنة ديناميكياً .

c) شكل أو حركة القاعدة التي يرتكز علها الجسم . مثال على ذلك سيارة تتحرك على طريق وعر فيه ارتفاعات وانخفاضات .

الفصل الحالي يسلط الضوء على الاهتزازات الحرة فقط نظراً لبساطتها ولأنها تشكل الأساس لدراسة الاهتزازات القسرية .

1) الاهتزازات الحرة غير المتخامدة :

لدراسة هذا النوع من الحركات الاهتزازية نتأمل جسماً ساكناً كتلته m ، ومربوطاً بنابض ثابت صلابته k ، وذلك كما هو مبيّن في الشكل(6-11) . فإذا أزحنا هذا الجسم عن موضع توازنه الساكن ثم تركناه حراً فإنّه يتحرك نحو اليمين ونحو اليسار تحت تأثير توتر النابض $\mathbf{F}_s$ فقط .



الشكل (6-11)

وتدلنا التجربة أن توتر النابض متناسب مع استطالته ، ونستنتج من ذلك أن التوتر الموافق لأي انتقال x للجسم يكون طيلة الحركة معيناً بالعلاقة :

$$\mathrm{F_s} = -kx \qquad (11)$$

وبتطبيق القانون الأساسي في التحريك ، وملاحظة أن التسارع هو المشتق الثاني للانتقال، نحصل على المعادلة الآتية :

$$\sum \mathrm{F}_x = ma_x \;\Rightarrow -kx = m\ddot{x} \;\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (12)$$

نقسّم طرفي هذه المعادلة على m ونستخدم الرمز الآتي :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (13)$$

تسمى ω_{n} **التردد الطبيعي للاهتزاز الحر** ، وتقاس بوحدة rad/s . تتحول عندئذ المعادلة إلى الصيغة الآتية :

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad (14)$$

وهذه العلاقة هي المعادلة التفاضلية للاهتزازات الحرة غير المتخامدة ، وحلها الرياضي يمكن أن يكتب على النحو الآتي :

$$x = A\sin(\omega_n t + \varphi) \qquad (15)$$

وباشتقاق هذه المعادلة نحصل على علاقة السرعة الآتية :

$$v = \dot{x} = A\omega_n \cos(\omega_n t + \varphi) \qquad (16)$$

حيث يشير الرمز A إلى **سعة الاهتزاز** ، والرمز φ إلى **زاوية الطور** . ويتحدد هذان الثابتان انطلاقاً من الحالة الابتدائية للحركة وباستخدام العلاقتين السابقتين ، كما يلي:

$$\mathrm{t} = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = A\sin\varphi \;\Rightarrow\; \sin\varphi = \frac{x_0}{A}$$

$$\mathrm{t} = 0 \;\Rightarrow\; v_0 = A\omega\cos\varphi \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \frac{v_0}{A\omega}$$

وبما أن :

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

وبالتعويض ينتج لدينا :

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad (17)$$

$$\tan\varphi = \frac{x_0\omega_n}{v_0} \qquad (18)$$

فإذا افترضنا أن الجسم قد أزيح في لحظة البدء عن وضع توازنه إزاحة قدرها x_0 ، ثم ترك فجأة من هذا الوضع دون سرعة ابتدائية . عندئذ ينتج لدينا :

$$A = x_0 \quad ; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = x_0 \sin(\omega_n + \frac{\pi}{2}) = x_0 \cos \omega_n t \qquad (19)$$

يوضح الشكل السابق أيضاً العلاقة بين الانتقال x والزمن t ، وهي حركة توافقية بسيطة .

ويتبين لنا من هذا المنحني أن القيمة العددية العظمى للانتقال هي x_0 . ويسمى الزمن اللازم لجعل الجسم يقوم بدورة كاملة حول وضع توازنه **دور الاهتزاز** ويحسب بالعلاقة :

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \text{sec} \qquad (20)$$

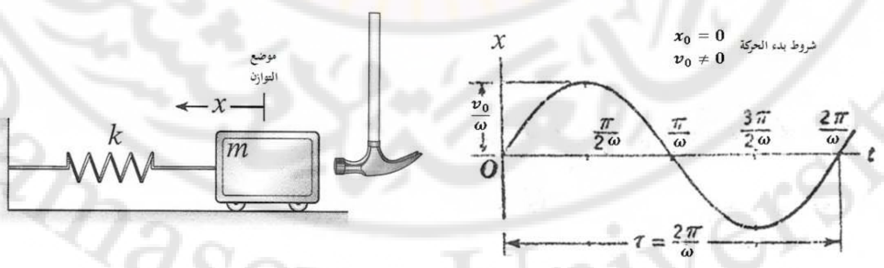
كما يسمى عدد دورات اهتزاز الجسم في الثانية الواحدة **تردد الاهتزاز** ويقاس بوحدة تدعى الهرتز (Hz) ، ويرمز له بالحرف f ويحسب بالعلاقة :

$$\mathrm{f} = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi} \qquad (21)$$

أما الآن فسنبحث في حالة خاصة أخرى يكون فيها اهتزاز الجسم قد بدأ بفعل صدمة أفقية ، أعطته سرعة ابتدائية عندما كان في وضع توازنه الساكن كما هو واضح في الشكل(7-11). فيكون لدينا عندئذ :

$$A = \frac{v_0}{\omega} \quad ; \quad \varphi = 0$$

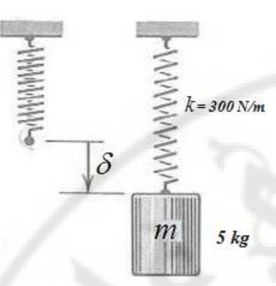
$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega_n t \qquad (22)$$



الشكل (7-11)

يوضح الشكل السابق أيضاً العلاقة بين الانتقال x والزمن t في هذه الحالة .

مثال رقم (31)



يعلق جسم كتلته 5 kg تعليقاً شاقولياً بنابض ثابت صلابته 300N/m كما هو مبين في الشكل. فإذا أزحنا هذا الجسم عن موضع توازنه الساكن نحو الأسفل بمقدار 10cm ، ثم تركناه حراً ، فأوجد عندئذ ما يلي:

1. الاستطالة الساكنة (δ) للنابض بفعل هذا التعليق .
2. المعادلة التفاضلية العامة للحركة الاهتزازية الناتجة .
3. التردد الطبيعي للاهتزاز بوحدة rad/s.
4. التردد الطبيعي للاهتزاز بوحدة الهرتز .
5. دور الاهتزاز ($\tau = ?$).
6. العلاقة بين الانتقال x والزمن t .
7. القيمة القصوى لسرعة الجسم .
8. القيمة القصوى لتسارع الجسم .

الحل : ....

الاستطالة الساكنة للنابض : نلاحظ في وضع التوازن أن قوتي النابض $k\delta$ والوزن W متساويتان . إذن :

$$W = k\delta \Rightarrow \delta = \frac{mg}{k} = \frac{5(9.8)}{300} = 0.16m$$

المعادلة التفاضلية العامة للحركة :

نرسم مخطط الجسم الحر في وضع الحركة

كما هو مبين في الشكل، فنحصل بتطبيق قانون التحريك الأساسي على الآتي :

$$\sum \mathrm{F}_x = ma_x \quad \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \quad \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \ \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \ \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

التردد الطبيعي للاهتزاز بوحدة (rad/s) :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{300}{5}} = 7.75 \ rad/s$$

التردد الطبيعي للاهتزاز بوحدة الهرتز :

$$\mathrm{f} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{7.75}{2\pi} = 1.23 \, Hz$$

دور الاهتزاز :

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{7.75} = 0.81 \, sec$$

العلاقة بين الانتقال والزمن : لدينا :

$$x = x_0 \sin(\omega_n t + \frac{\pi}{2}) = x_0 \cos \omega_n t$$

وبالتعويض نجد أن :

$$x = 0.1 \cos 7.75 \, t$$

القيمة القصوى للسرعة : باشتقاق علاقة الانتقال نجد :

$$v = -0.1(7.75) \sin 7.75 \, t = -0.78 \sin 7.75 \, t$$

$$\Rightarrow \ v_{max} = -0.78 \, m/s$$

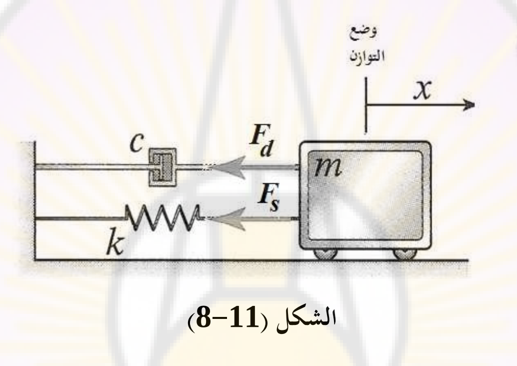
القيمة القصوى للتسارع : باشتقاق علاقة السرعة نجد :

$$a = 0.78(7.75) \cos 7.75 \, t = 6.05 \cos 7.75 \, t$$

$$\Rightarrow \ a_{max} = 6.05 \, m/s^2$$

2) الاهتزازات الحرة المتخامدة :

في الواقع ، جميع الاهتزازات الحرة تتخامد بمرور الزمن ، تحت تأثير إما قوى الاحتكاك الطبيعية أو قوى الاحتكاك الناجمة عن استخدام وحدات إخماد صناعية تسمى مانعات أو مُخَمِّدات الاهتزاز (Dampers) . لدراسة هذا النوع من الحركات الاهتزازية نتأمل جسماً كتلته m مربوطاً بنابض وموصولاً بمُخَمّد اهتزاز ، وذلك كما هو مبين في الشكل(11-8) . فإذا أزحنا هذا الجسم عن موضع توازنه ثم تركناه حراً فإنّ حركته الاهتزازية سوف تتضاءل تدريجياً تحت تأثير قوة الاحتكاك $\mathbf{F}_\mathrm{d}$ التي يولدها مُخَمّد الاهتزاز.



الشكل (8-11)

وتدلنا التجربة أن قوة الاحتكاك $\mathbf{F}_\mathrm{d}$ تتناسب طرداً مع سرعة الجسم وتؤثر في الاتجاه المعاكس لتلك السرعة . وهذا يعني :

$$\mathrm{F_d} = -cv = -c\dot{x} \qquad (23)$$

يسمى c مُعامل التخامد ، وهو عبارة عن ثابت تتعلق قيمته بالمواصفات الفنية لمخَمِّد الاهتزاز ويقدر بوحدة N.s/m . وبتطبيق القانون الأساسي في التحريك على الجسم ، وملاحظة أن التسارع هو المشتق الثاني للانتقال ، نحصل على :

$$\sum \mathrm{F}_x = ma_x \ \Rightarrow -F_d - F_s = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (24)$$

وهذه العلاقة هي المعادلة التفاضلية للاهتزازات الحرة المتخامدة . نُقسِّم طرفي هذه المعادلة على m ، ونفرض أن : c/m = 2b فنحصل على المعادلة :

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad (25)$$

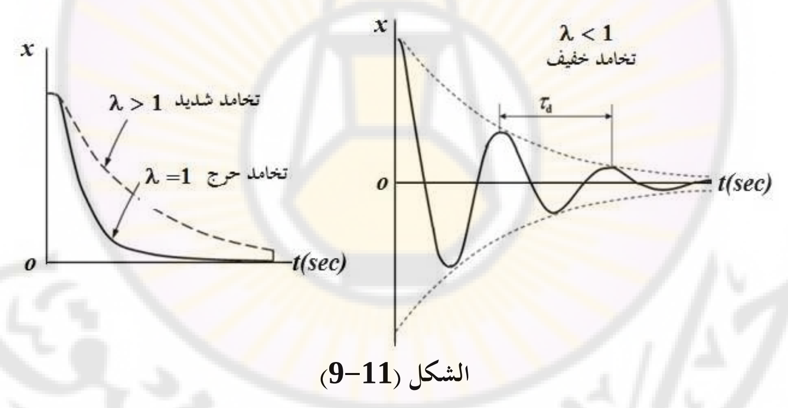
ويدلنا علم الاهتزازات أن الحل العام لهذه المعادلة يعتمد على المقدار C_c والذي يدعى معامل التخامد الحرج أو الحدي ، ويحسب بالعلاقة :

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \qquad (26)$$

ومن أجل التعبير عن شدة التخامد يستخدم مفهوم نسبة التخامد (Lamda) λ والتي تتعين بالعلاقة :

$$\lambda = \frac{c}{c_c} \qquad (27)$$

واستنادا إلى شدة التخامد ، فإنّنا نميز كما يبيّن الشكل (9–11) ثلاث حالات:



الشكل (9–11)

- إذا كانت $\lambda > 1$: فإنّ حركة الجسم لن تكون حركة اهتزازية ، لأن التخامد يكون شديداً ، مما يؤدي إلى عودة الجسم إلى وضع التوازن في زمن قصير جداً.
- إذا كانت $\lambda = 1$: فإنّ حركة الجسم لن تكون حركة اهتزازية أيضاً، وسيعود الجسم إلى وضع التوازن في زمن قصير جداً.
- إذا كانت $\lambda < 1$: فإنّ حركة الجسم تكون حركة اهتزازية متخامدة تدريجياً ، لأن شدة التخامد تكون خفيفة أو متوسطة . في هذه الحالة الجديرة بالاهتمام يكون الحل العام ، بالاستناد إلى نظرية المعادلات التفاضلية ، على النحو الآتي :

$$x = A\, e^{-bt} \sin(\omega_d t + \varphi) \qquad (28)$$

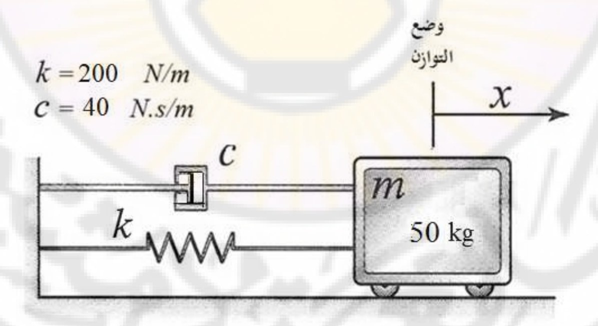
حيث :

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - b^2} \qquad (29)$$

نلاحظ أن الحركة الموصوفة بهذه العلاقة هي حركة اهتزازية متناقصة السعة .وتتعين قيمتا الثابتين A و φ انطلاقاً من الحالة الابتدائية للحركة . يبين الشكل المذكور العلاقة بين الانتقال x والزمن t وذلك عند إزاحة الجسم بشدة عن وضع توازنه ثم تركه حراً بدون سرعة ابتدائية .

مثال رقم (32)

يبين الشكل عربة Cart كتلتها 50 kg مربوطة بنابض ومتصلة بمخَمِّد اهتزاز . إذا أزحنا هذه العربة عن موضع توازنها الساكن نحو اليمين بمقدار 20 cm ، ثم تركناها حرة، فأوجد عندئذ : 1– تردد الحركة المتخامدة 2– نسبة التخامد 3– دور الاهتزاز 4 – العلاقة بين الانتقال x والزمن t .



الحل : ....

تردد الحركة المتخامدة : لدينا :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{200}{50}} = 2\ \frac{rad}{s} \ ; \quad b = \frac{40}{2 \times 50} = 0.4$$

ويتحدد تردد الحركة المتخامدة بالعلاقة :

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - b^2} = \sqrt{4 - 0.16} = 1.96\, rad/s$$

نسبة التخامد $(\lambda = ?)$

$$\lambda = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{40}{2 \times 50 \times 2} = 0.2$$

دور الاهتزاز $(\tau_d = ?)$

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{1.96} = 3.2\, sec$$

العلاقة بين الانتقال والزمن : لدينا :

$$x = A\, e^{-bt} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

وبالتعويض ينتج أن :

$$x = A\, e^{-0.4t} \sin(1.96t + \varphi)$$

ويتحدد الثابتان A و φ انطلاقاً من الحالة الابتدائية للحركة كما يلي:

$$t = 0 \Rightarrow 20 = A \sin\varphi \qquad (1)$$

وباشتقاق معادلة الانتقال نحصل على علاقة السرعة الآتية :

$$v = -0.4A\, e^{-0.4t} \sin(1.96t + \varphi) + 1.96\, A\, e^{-0.4t} \cos(1.96t + \varphi)$$

$$t = 0 \Rightarrow 0 = -0.4A \sin\varphi + 1.96\, A \cos\varphi \qquad (2)$$

$$0.4 \sin\varphi = 1.96 \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1.96}{0.4} \Rightarrow \tan\varphi = 4.9$$

$$\Rightarrow \varphi = 78.5° = 1.37\, rad$$

وبالتعويض في العلاقة (1) ينتج أن $A = 20$ ، وتصبح معادلة الانتقال :

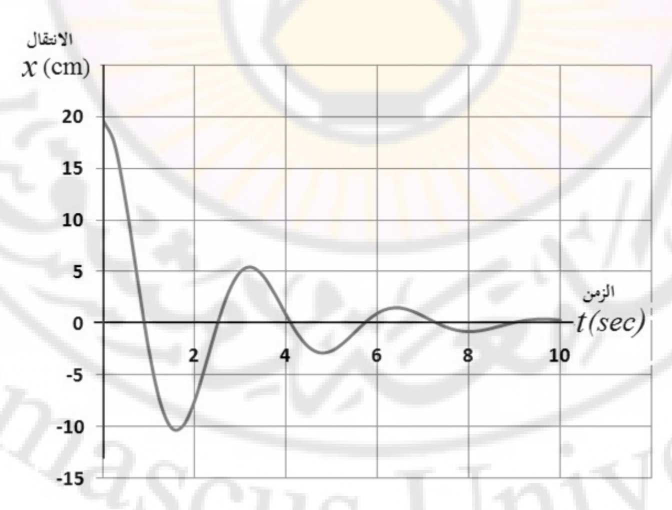
$$x = 20\, e^{-0.4t} \sin(1.96t + 1.37) \quad cm$$

الجدول الآتي يوضح جميع مؤشرات الحركة الاهتزازية بالإضافة إلى كيفية تغير الانتقال مع الزمن خلال الفترة الزمنية الممتدة من الصفر حتى 10 sec .

العلاقة بين الانتقال والزمن	
الانتقال (cm)	الزمن(sec)
19.6	0
-2.5	1
-7.5	2
5.0	3
0.9	4
-2.7	5
1.0	6
0.7	7
-0.8	8
0.1	9
0.3	10

مؤشرات الحركة الاهتزازية المتخامدة				
المؤشرات	الرمز	Sign	القيمة العددية	وحدة القياس
الكتلة	m	=	50	kg
ثابت النابض	k	=	200	N/m
معامل التخامد	c	=	40	N.s/m
التردد الطبيعي للاهتزاز	ω_n	=	2	rad/s
مقدار ثابت	b	=	0.4	
تردد الاهتزاز المتخامد	ω_d	=	1.96	rad/s
معامل التخامد الحرج	Cc	=	200	N.s/m
نسبة التخامد	λ	=	0.2	
دور الاهتزاز	τ_d	=	3.21	sec
سعة الاهتزاز	A	=	20	cm
زاوية الطور	φ	=	1.37	rad

ويبيّن الشكل الآتي تغير الانتقال مع الزمن بيانياً خلال الفترة الزمنية المذكورة آنفاً.



ونظراً لأهمية استخدام الحاسوب في انجاز الحسابات الهندسية بدقة وبسرعة عالية ، فإننا سنبيّن كيفية حل المثال الحالي بمساعدة أقوى البرامج المستخدمة في الوقت الحاضر والتي تشمل : Excel و Matlab وSimulink .

الحل باستخدام برنامج Excel : يبيّن الشكل الآتي بالتفصيل كيفية حل المثال الحالي باستخدام برنامج Excel .

الحركة الاهتزازية - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E
1	حساب مؤشرات الحركة الاهتزازية المتخامدة باستخدام **Excel**				
2	المؤشرات	الرمز	Sign	القيمة العددية	وحدة القياس
3	الكتلة	m	=	50	kg
4	ثابت النابض	k	=	200	N/m
5	معامل التخامد	c	=	40	N.s/m
6	التردد الطبيعي للاهتزاز	ω_n	=	=SQRT(D4/D3)	rad/s
7	مقدار ثابت	b	=	=D5/(2*D3)	
8	تردد الاهتزاز المتخامد	ω_d	=	=SQRT(D6^2-D7^2)	rad/s
9	معامل التخامد الحرج	Cc	=	=2*D3*D6	N.s/m
10	نسبة التخامد	λ	=	=D5/D9	
11	دور الاهتزاز	τ_d	=	=2*PI()/D8	sec
12	سعة الاهتزاز	A	=	20	cm
13	زاوية الطور	φ	=	1.37	rad
14	العلاقة بين الانتقال والزمن				
15	الزمن **(sec)**	الانتقال ***(cm)***			
16	0	=D$12*EXP(-D$7*A16)*SIN(D$8*A16+D$13)			
17	1	=D$12*EXP(-D$7*A17)*SIN(D$8*A17+D$13)			
18	2	=D$12*EXP(-D$7*A18)*SIN(D$8*A18+D$13)			
19	3	=D$12*EXP(-D$7*A19)*SIN(D$8*A19+D$13)			
20	4	=D$12*EXP(-D$7*A20)*SIN(D$8*A20+D$13)			
21	5	=D$12*EXP(-D$7*A21)*SIN(D$8*A21+D$13)			
22	6	=D$12*EXP(-D$7*A22)*SIN(D$8*A22+D$13)			
23	7	=D$12*EXP(-D$7*A23)*SIN(D$8*A23+D$13)			
24	8	=D$12*EXP(-D$7*A24)*SIN(D$8*A24+D$13)			
25	9	=D$12*EXP(-D$7*A25)*SIN(D$8*A25+D$13)			
26	10	=D$12*EXP(-D$7*A26)*SIN(D$8*A26+D$13)			
27					
28					

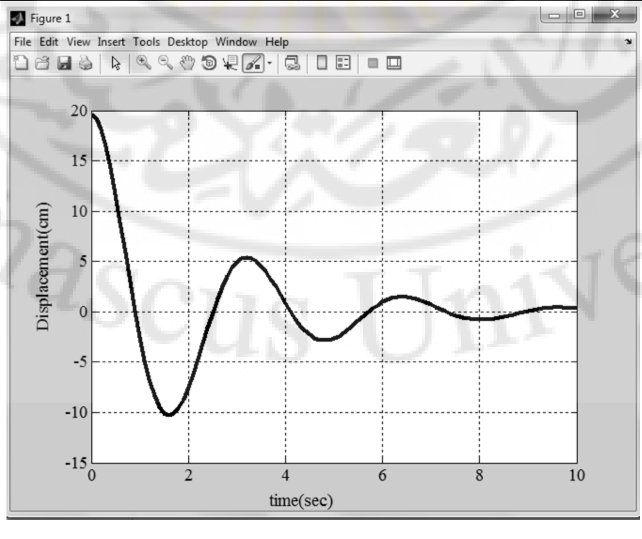
ورقة٤ ورقة٣ ورقة٢ ورقة١

%١٠٠

الحل باستخدام برنامج MATLAB : يبيّن الشكل الآتي بالتفصيل كيفية حل المثال الحالي باستخدام برنامج MATLAB .

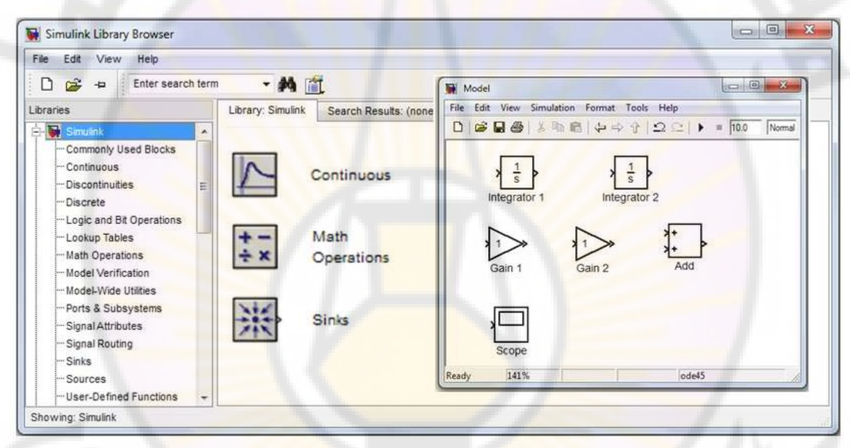
زر التشغيل

```
% Solving the problem with MATLAB
m =50; % Mass of Oscillator
k =200 ; % Spring constant
c =40 ; % Coefficient of damping
wn =sqrt(k/m); % Natural frequency in rad/s
b =c /(2*m);
wd =sqrt(wn^2-b^2);
cc =2*m*wn; % Critical coefficient of damping
Lamda =c/cc; % Damping ratio
Td=2*pi()/wd; % Period of Vibration in seconds
fprintf('The frequency of damping vibration = %5.2f rad/s\n',wd);
fprintf('Damping ratio = %5.2f \n',Lamda);
A = 20; % Amplitude of vibration
Phi = 1.37 ; % Phase of vibration in rad
t=0:0.1:10;
x = A*sin(1.96*t + Phi).*exp(-0.4*t);
plot(t,x);
xlabel ('time(sec)');    ylabel ('Displacement(cm)');
grid on;
```



الحل باستخدام برنامج المحاكاة Simulink الملحق ببرنامج MATLAB :

يمكننا باستخدام برنامج Simulink المثير للغاية إنشاء نموذج (Model) يسمح لنا بتحديد استجابة الجسم (Response of the body) في أثناء حركته الاهتزازية المتخامدة . يحتوي هذا النموذج مجموعة من الكتل (Blocks) الموصولة معاً بخطوط إشارة(signal lines) مهمتها نقل المعطيات . ولحل المسألة الحالية نحتاج ست كتل يتم سحبها من المكتبات الثلاث المبينة في الشكل ، ومن المفيد استبدال التسميات الأساسية للكتل المستخدمة بالتسميات المناسبة التي تعبّر عن وظيفتها.



إن خطوات العمل الضرورية لإنشاء النموذج المطلوب والمبين أدناه تتلخص في الآتي :

1. نكتب المعادلة التفاضلية للحركة الاهتزازية ثم نحسب المشتق الثاني للمتحولx :

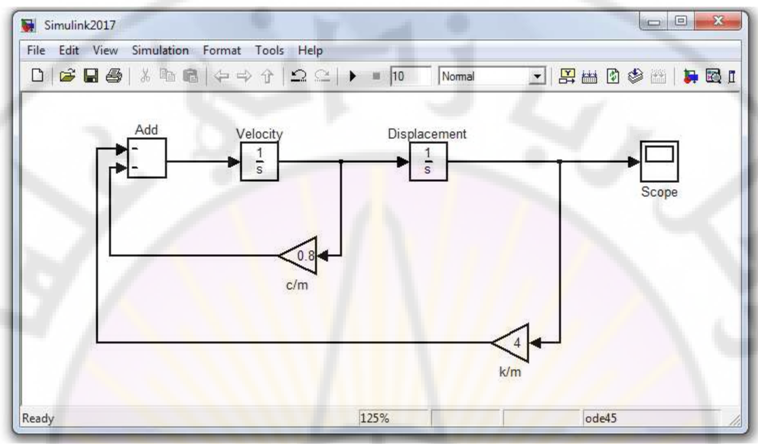
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

وبالتعويض ينتج أن :

$$\ddot{x} = -0.8\,\dot{x} - 4x$$

2. تشغيل البرنامج بالنقر على الزر Simulink في شريط أدوات MATLAB .
3. فتح نافذة نموذج جديدة بالنقر على قائمة ملف: File→New→Model
4. فتح مكتبة النظم المستمرة (Continuous) وسحب كتلتين من النوع Integrator، ثم نغيّر تسمية كل منهما ونقوم بسحب خط إشارة من خرج الكتلة

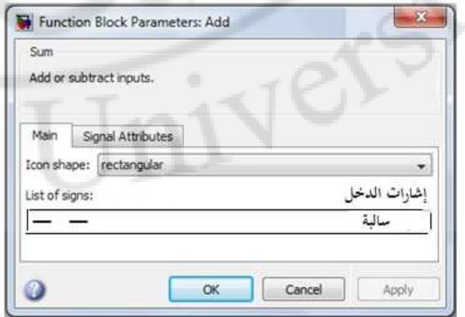
الأولى إلى دخل الكتلة الثانية كما هو مبين في الشكل. تقوم هاتان الكتلتان بإجراء عملية التكامل الرياضي على مرحلتين : في الأولى نحصل على السرعة (Velocity) وفي الثانية نحصل على الانتقال أو الإزاحة (Displacement) .



5. فتح مكتبة العمليات الحسابية (Math Operations) وسحب كتلتين من النوع Gain (ربح) ، ثم نضع التسمية المناسبة بعد إجراء الانعكاس الأفقي لكل منهما، كما نرسم خطي إشارة . تقوم الكتلة الأولى بضرب إشارة الدخل (السرعة) بالقيمة 0.8 ، بينما تقوم الكتلة الثانية بضرب إشارة الدخل (الانتقال) بالقيمة 4 .

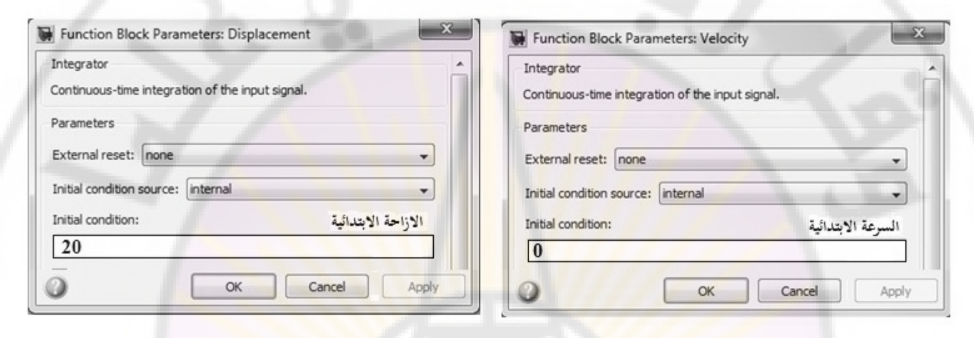
6. سحب كتلة من النوع Add أو Sum من مكتبة العمليات الحسابية ، ثم نرسم خطي إشارة . تسمح لنا هذه الكتلة بجمع القيمتين الداخلتين إليها ، وهنا ينبغي إدخال إشارة السالب المطبقة على كل منهما في مربع حوار الكتلة والذي يظهر عند النقر عليها كما هو مبين في الشكل .





7. سحب كتلة من النوع Scope من مكتبة المصبّات (Sinks) ثم نرسم خط إشارة. تسمح لنا هذه الكتلة بإظهار النتائج بعد إتمام عملية النمذجة وتشغيل زر المحاكاة.

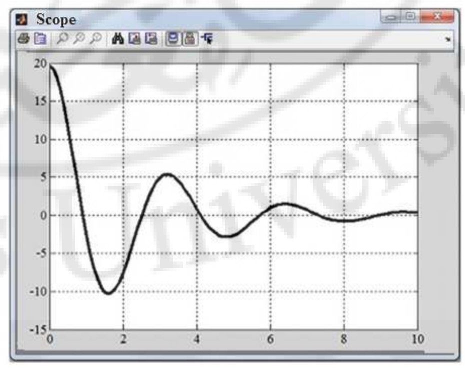
8. النقر على كتلتي الانتقال والسرعة من أجل إدخال الشروط الابتدائية في مربع الحوار الخاص بكل منهما .في مربع الحوار الخاص بالانتقال يجب ضبط الشروط الابتدائية على القيمة 20 ، وفي مربع الحوار الخاص بالسرعة يجب ضبطها على القيمة 0 .



9. اختيار الأمر Simulation →Configuration Parameters من شريط قوائم نافذة النموذج ، ثم ضبط الحقل Stop time على القيمة 10.

10. تشغيل عملية المحاكاة بالنقر على الزر Start simulation في شريط أدوات النموذج ، ثم النقر بعد ذلك على كتلة العرض Scope فتظهر عندئذ الحركة الاهتزازية المتخامدة كما هو مبين في الشكل ، وذلك بعد ضبط قياسها بالضغط على زر المنظار Autoscale.



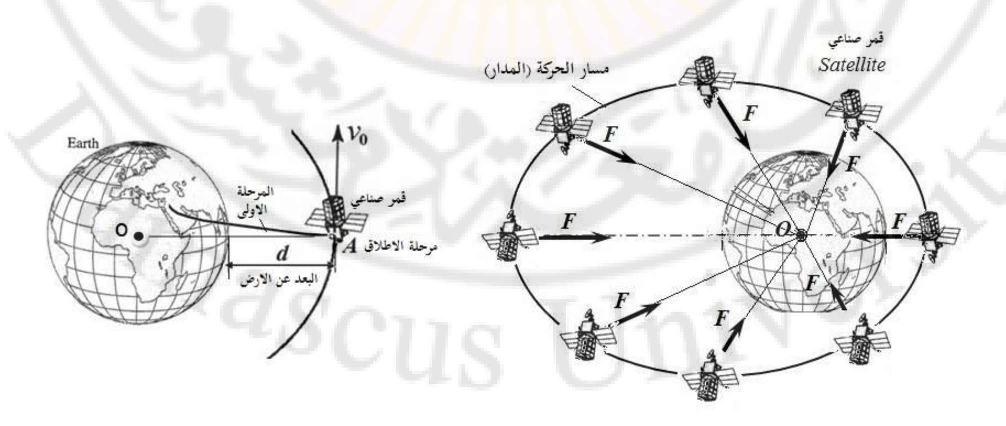


3–11 ميكانيك الفضاء – الأقمار الصناعية (Satellites) :

إن دراسة حركة الأقمار الصناعية هي من أبرز التطبيقات في مجال ميكانيك الفضاء. ولابدّ في البدء من الإشارة إلى أنَّ عملية إطلاق الأقمار الصناعية تجري عادة على مرحلتين كما هو واضح في الشكل (11–10) .في المرحلة الأولى يقوم صاروخ موجّه وبمساعدة أجهزة خاصة برفع القمر الصناعي عن سطح الكرة الأرضية مسافة مقدارها d إلى الموضع المطلوب A . وفي المرحلة الثانية تجري عملية الإطلاق بالسرعة الابتدائية اللازمة v_o ، بحيث لا يسقط على الأرض ولا ينفلت في الفضاء الخارجي، إنما يصبح تابعاً للأرض ويدور حولها. وبهذه الطريقة تم إطلاق أول قمر صناعي في العالم ، وكذلك أول سفينة فضاء تحمل إنساناً على متنها. هذا وتؤثر في الأقمار الصناعية التي تدور حول الأرض قوة جذب الأرض **F** فقط ، والتي تتجه إلى مركز الأرض o ، علماً بأنّه وفقاً لقانون الجاذبية العام يكون:

$$\mathrm{F} = G\frac{Mm}{r^2} \qquad (30)$$

حيث تمثل G– ثابت الجاذبية العام ، M– كتلة الكرة الأرضية ، m– كتلة القمر الصناعي، r– بُعْد القمر عن مركز الأرض .



الشكل (11–10)

وبما أن وزن الجسم mg بالنسبة للأجسام الواقعة على سطح الأرض يمثل قوة جذب الأرض F ، إذن وبعد ملاحظة أن r تساوي نصف قطر الكرة الأرضية R نجد :

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}$$

حيث g – تسارع الجاذبية الأرضية. ومن هذه العلاقة ينتج أن :

$$GM = gR^2 \qquad (31)$$

وبالتعويض في قانون الجاذبية العام نحصل على العلاقة الآتية :

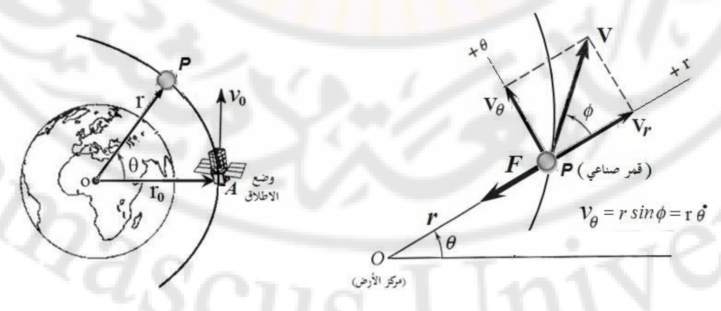
$$\mathrm{F} = mg\frac{R^2}{r^2} \qquad (32)$$

من جهة أخرى ، بما أن القمر الصناعي يخضع لتأثير قوة وحيدة عزمها حول مركز الأرض يساوي إلى الصفر ، إذن كمية الحركة الزاوية H_o لهذا القمر بالنسبة لمركز الأرض تبقى ثابتة طيلة الحركة . ويحسب مقدار H_o وفق المعادلة الآتية :

$$H_o = rmv\sin\phi = constant \qquad (33)$$

حيث ϕ– هي الزاوية المحصورة بين شعاع السرعة **v** وشعاع الموضع **r** للقمر p .

استنتاج معادلة مسار الحركة : نفترض أن القمر الصناعي عبارة عن جُسَيْم يقع في لحظة الإطلاق على بعد r_o من مركز الأرض ، وأنّ سرعته الابتدائية v_o متجهة في اتجاه يوازي سطح الكرة الأرضية كما هو مبين في الشكل (11–11).



الشكل (11–11)

فإذا افترضنا أن الكرة الأرضية ثابتة في مكانها ، فإنّنا نجد بتطبيق القانون الأساسي في التحريك مع استخدام الإحداثيات القطبية (r,θ) ما يلي :

$$\sum \mathrm{F_r} = ma_r$$

$$-\mathrm{F} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

وهنا يجب تعيين المشتق الأول للمقدار θ ، وكذلك المشتق الثاني للمقدار r . إن تطبيق علاقة كمية الحركة الزاوية حول المركز o يحدد لنا المقدار الأول وذلك كما يلي :

$$H_o = rmv\sin\phi = rmv_\theta = rm(r\dot{\theta})$$

$$H_o = mr^2\dot{\theta}$$

وإذا رمزنا لحاصل قسمة H_o على الكتلة m بالرمز h ، عندئذ يكون :

$$h = r^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

وللحصول على المشتق الأول للمتحول r نكتب الآتي :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

حيث حصلنا على الحد الأخير في هذه العلاقة بعد تطبيق قاعدة التفاضل الآتية:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{0 - \frac{dr}{d\theta}}{r^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

وللحصول على المشتق الثاني للمتحول r نكتب :

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)$$

$$\ddot{r} = -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

ولتبسيط الحسابات نفرض أن $u=1/r$ ، فينتج لدينا بعد التعويض :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

إن الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية المهمة يمكن أن يكتب على النحو الآتي :

$$u = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta$$

وبالانتقال من المتحول u إلى المتحول r نحصل على الصيغة النهائية الآتية لمعادلة مسار حركة القمر الصناعي :

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta \qquad (34)$$

حيث تمثل C- ثابت التكامل ويتعين عادة من الشروط الابتدائية للحركة . إن هذه المعادلة هي في الواقع معادلة قطع مخروطي (ناقص أو مكافئ أو زائد) ، حيث يمثل مركز الأرض بؤرة هذا القطع المخروطي . وعند حل المسائل يتحدد مقدار الثابت C عادة بدلالة الموضع الابتدائي r_o والسرعة الابتدائية v_o ، كما هو مبين في الشكل (1-1) ، وذلك بفرض أن :

$$\theta = 0 \quad ; \quad r = r_0 \quad ; \quad h = r_0^2\dot{\theta}_0 = r_0 v_0$$

ثم التعويض بمعادلة المسار الأخيرة ، فينتج لدينا :

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2} \qquad (35)$$

وتبعاً لمقدار الثابت C ، فإنّنا بعد الرجوع إلى علم الهندسة التحليلية في الرياضيات نستطيع أن نُميِّز كما هو واضح في الشكل(11-12) المسارات المحتملة الآتية للحركة:

- إذا كانت $C > GM/h^2$: فإنّ المسار يكون عندئذ على شكل قطع زائد.إن سلوك هذا المسار غير مسموح به لأنّ القمر لن يعود ثانية إلى موضعه الابتدائي .
- إذا كانت $C = GM/h^2$: فإنّ المسار يكون عندئذ على شكل قطع مكافئ. إن سلوك هذا المسار غير مسموح به أيضا لنفس السبب المذكور آنفاً . وبتعويض قيمة هذا الثابت في معادلة المسار نحصل على سرعة الهروب v_e الآتية :

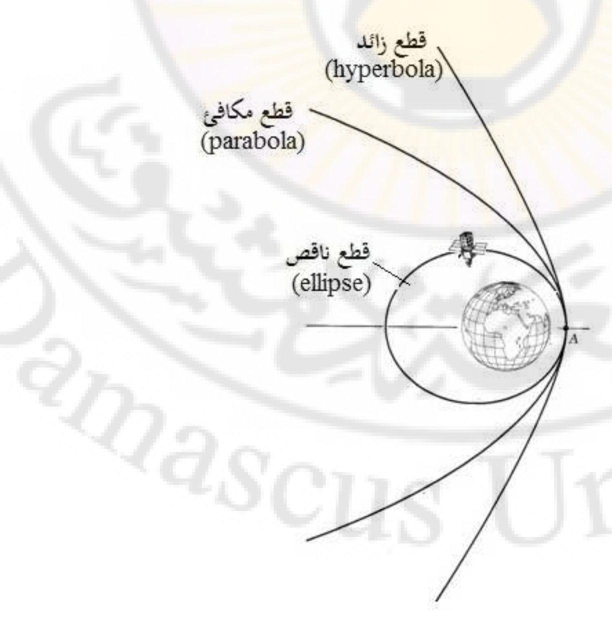
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}} \qquad (36)$$

فإذا انطلق القمر بسرعة ابتدائية تساوي هذه السرعة أو أكبر منها ، فإنّه سيتحرك مبتعداً بلا حدود عن الأرض ، ويدخل القمر حينئذ عالم الغيب .

- إذا كانت $C < GM/h^2$: فإنّ المسار يكون عندئذ بيضاوياً على شكل قطع ناقص . وتتحرك معظم الأقمار الصناعية في مدارات بيضاوية .
- إذا كانت $C = 0$: فإنّ المسار يكون عندئذ على شكل دائرة .وبتعويض قيمة هذا الثابت في معادلة المسار نحصل على سرعة الإطلاق v_c اللازمة لجعل القمر يدور في مدار دائري :

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}} \qquad (37)$$

فإذا انطلق القمر بسرعة ابتدائية أقل من هذه السرعة فإنّه سيسقط على الأرض ولن يستطيع الدوران حولها .



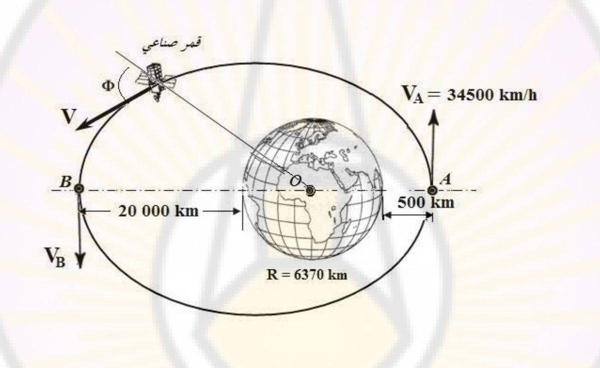
الشكل (11–12)

وهكذا حتى يستطيع القمر الصناعي أن يتحرك في مسار بيضاوي لا بدّ من أن تكون السرعة الابتدائية للإطلاق كما يلي :

$$v_e > v_0 > v_c \qquad (38)$$

مثال رقم (33)

أُطلق قمر صناعي بسرعة ابتدائية قدرها v_A =34500 km/h وذلك من النقطة A التي تبعد مسافة قدرها 500 km عن سطح الأرض كما هو مبين في الشكل. أوجد سرعة القمر V_B عندما يبلغ أقصى ارتفاع له وقدره 20000 km .



الحل : ....

بما أنّ القمر الصناعي يخضع لتاثير قوة وحيدة مركزية تتجه نحو مركز الارض ، فإنّ كمية الحركة الزاوية تكون عندئذ ثابتة ، لذا يمكن ان نكتب :

$$rmv \sin\phi = constant$$

وبتطبيق هذه العلاقة بين النقطتين A و B مع ملاحظة أن الزاوية $\phi_1 = \phi_1 = 90°$

نجد:

$$r_A m v_A = r_B m v_B \quad \Rightarrow \quad v_B = v_A \frac{r_A}{r_B}$$

$$r_A = (500 + 6370) = 6870\ km$$

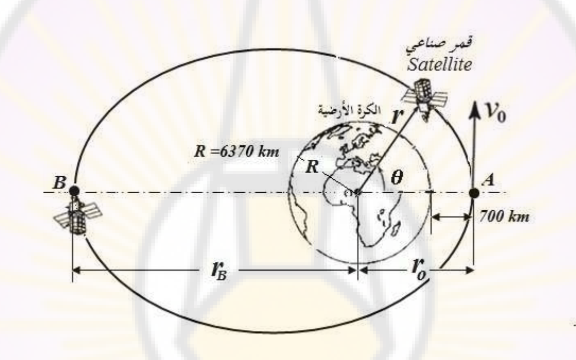
$$r_B = (20000 + 6370) = 26370\ km$$

وبالتعويض ينتج لدينا :

$$v_B = 34500(\frac{6870}{26370}) = 8988 \ km/h$$

مثال رقم (34)

أُطلق قمر صناعي للاتصالات بسرعة ابتدائية v_0 =10000 m/s وذلك من النقطة A التي تبعد مسافة قدرها 700 km عن سطح الأرض كما هو مبين في الشكل. أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه هذا القمر بالنسبة لمركز الأرض (r_B=?) .



الحل : ....

يعتمد حل هذه المسألة على معادلة المسار الآتية :

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta$$

ويتحدد الثابت C بتطبيق العلاقة الآتية وذلك انطلاقاً من الشروط الابتدائية لعملية إطلاق القمر الصناعي ، والموافقة للزاوية θ = 0 :

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2}$$

وباستخدام معطيات المسألة نحصل على القيم الآتية :

$$r_0 = R + 700 = 6370 + 700 = 7070 \, km$$

$$GM = gR^2 = 9.8 \times (6370 \times 10^3)^2$$
$$= 398 \times 10^{12}\ m^3/s^2$$
$$h = r_0 v_0 = 7070 \times 10^7\ m^2/s$$

وبالتعويض في معادلة الثابت C نجد أن :

$$C = 0.62 \times 10^{-7}$$

وبالرجوع إلى معادلة المسار ، مع ملاحظة أن النقطة B تمثل أقصى ارتفاع لهذا القمر ، وهي توافق الزاوية $\theta = 180°$ ، عندئذ يكون :

$$\frac{1}{r_B} = \frac{GM}{h^2} + C\cos 180°$$

وبالتعويض ينتج لدينا :

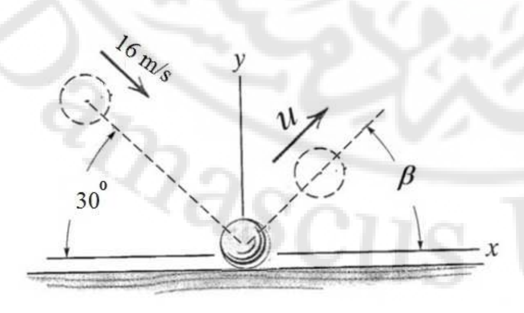
$$\frac{1}{r_B} = 0.80 \times 10^{-7} - 0.62 \times 10^{-7} = 0.18 \times 10^{-7}$$
$$r_B = 5.56 \times 10^7\ m = 55600\ \ km$$

مسائل غير محلولة

UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

أُسقطت كرة فولاذية على صفيحة معدنية بسرعة 16m/s وبزاوية 30° كما هو مبين في الشكل. احسب سرعة الارتداد u والزاوية β إذا كان معامل الارتداد بين الكرة والصفيحة هو 0.5 .

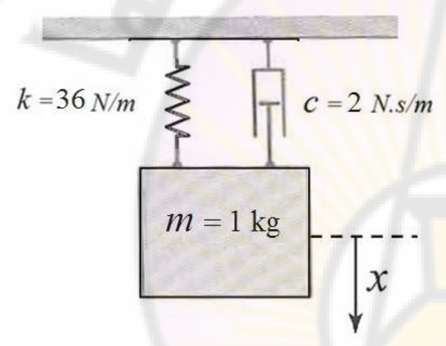


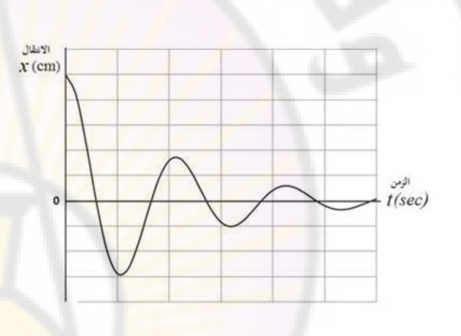
الجواب : $u = 14.42$ m/s ; $\beta = 16.1°$

مسألة رقم (2) :

يبين الشكل جسماً كتلته 1 kg مُعلَّقاً بنابض ومتصلاً بمخمد اهتزاز . فإذا أزحنا هذا الجسم عن موضع توازنه الساكن بمقدار 10 cm ثم تركناه حراً ، فأوجد ما يلي:

1. نسبة التخامد $(\lambda = ?)$.
2. تردد الحركة المتخامدة $(\omega_d = ?)$
3. دور الاهتزاز $(\tau_d = ?)$.
4. العلاقة بين الانتقال x والزمن t .





الجواب : $\lambda = 0.17$; $\omega_d = 5.92\ rad/s^2$; $\tau_d = 1.06\ sec$;

$x = 10.14\, e^{-t} \sin(5.92t + 1.4)\ \ cm$

مسألة رقم (3) :

أُطلق قمر صناعي بسرعة ابتدائية قدرها v_A =36900 km/h وذلك من النقطة A التي تبعد مسافة قدرها 500 km عن سطح الأرض كما هو مبين في الشكل. احسب سرعة هذا القمر عندما يبلغ أقصى ارتفاع وقدره 60000 km .

الجواب : v_B = 3820 km/h

أسـئلة نظـرية عامّـة

أولاً – أسئلة نظرية على قسم السكون

أجب عمَّا يلي :

1. ما المقصود بمخطط الجسم الحر ؟ وما هي أهميته ؟
2. اشرح كيفية دراسة توازن ثلاث قوى واقعة في مستو واحد باستخدام قاعدة الجيوب .
3. ما الطريقتان المستخدمتان في تحليل الهياكل الشبكية ؟ وضّح متى تستخدم كل منهما.
4. اكتب الشكل التحليلي الجبري لمعادلات التوازن في حالة القوى الفراغية .
5. عدِّد قوانين الاحتكاك .
6. اشرح بإيجاز طريقة تعيين معامل الاحتكاك تجريبياً .
7. عرِّف الاحتكاك التدحرجي ، ثم وضِّح المقصود بمعامل مقاومة التدحرج ؟
8. ما المقصود بالمفاهيم الآتية : مركز الثقل – مركز العطالة – المركز المتوسط الهندسي .
9. اشرح بإيجاز كيفية تحديد مركز الثقل تجريبياً .
10. استنتج رياضياً الإحداثيات العامة لمركز ثقل الجسم الصلب .

اختر الإجابة الصحيحة لكلّ ممّا يأتي :

1. تُعرّف القوة على أنها:

a) تأثير جسم في جسم آخر . b) محصلة قوى الجاذبية الأرضية .

c) سرعة انجاز العمل الذي يقوم به جسم ما .

2. إن الجُسَيم المادي هو بالتعريف :

a) أصغر شيء ممكن . b) جسم صلب أهملت أبعاده لتبسيط الدراسة .

c) كل ما سبق صحيح .

3. المقصود بمصطلح اتجاه القوة هو :

a) جهة القوة . b) حامل أو خط تأثير القوة . c) كُلّ ما سبق .

4. عند حل مسائل علم التوازن ينبغي أولاً :

a) رسم مخطط الجسم الحر . b) تطبيق معادلات التوازن . c) اختزال القوى الخارجية إلى قوة واحدة ومزدوجة .

5. يتحقق توازن ثلاث قوى واقعة في مستو واحد إذا :

a) تقاطعت خطوط تأثيرها في نقطة واحدة . b) تقاطعت خطوط تأثيرها في ثلاث نقاط .

c) لم تتقاطع خطوط تأثيرها .

6. في الهياكل المحددة ستاتيكياً ، يرتبط عدد القضبان m مع عدد العقد n بالعلاقة الآتية :

a) $m < 2n-3$ b) $m = 2n-3$ c) $m > 2n-3$

7. إن اتجاه رد فعل المسند الاسطواني في حالة القوى الفراغية الموازية لمستوٍ معين :

a) شاقولي . b) مجهول ويُحلَّل إلى مركبتين. c) مجهول ويُحلَّل عادة إلى ثلاث مركبات.

8. إن اتجاه رد فعل المفصلة الاسطوانية في حالة القوى الفراغية الموازية لمستوٍ معين :

a) شاقولي . b) مجهول ويُحلَّل إلى مركبتين. c) مجهول ويُحلَّل إلى ثلاث مركبات.

9. إن اتجاه رد فعل المفصل الكروي في حالة القوى الفراغية :

a) شاقولي . b) مجهول ويُحلَّل إلى مركبتين. c) مجهول ويُحلَّل إلى ثلاث مركبات.

10. يتألف رد فعل المسند الصلب في حالة القوى الفراغية من :

a) ثلاث مركبات لقوة رد الفعل . b) ثلاث مزدوجات . c) ثلاث مركبات لقوة رد الفعل وثلاث مزدوجات.

11. إن مقدار معامل الاحتكاك الحركي يكون عادة :

a) أقل من معامل الاحتكاك الساكن . b) أكبر من معامل الاحتكاك الساكن.

c) مساوياً لمعامل الاحتكاك الساكن.

12. عند الاحتكاك الانزلاقي تبلغ قوة الاحتكاك قيمتها العظمى في حالة :

a) السكون التام . b) الحركة الوشيكة. c) بدء الحركة .

13. تتوقف قوة الشد في حالة الاحتكاك بين الحبال والبكرات على :

a) معامل الاحتكاك . b) زاوية التماس بين الحبل والبكرة . c) كُلّ ما سبق .

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

Damascus University

ثانياً – أسئلة نظرية على قسم الحركة

أجب عمّا يلي :

1. استنتج العلاقات الرياضية التي تربط بين الموضع والسرعة والتسارع في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام للجسيمات المادية .
2. استنتج معادلات الموضع والسرعة والتسارع عند الحركة الخطية المنحنية للجسيم المادي وذلك باستخدام جملة الإحداثيات الديكارتية (x,y) .
3. استنتج سرعة الجسيم وتسارعه عند الحركة الخطية المنحنية وذلك باستخدام جملة الإحداثيات المماسية والناظمية (t,n) .
4. استنتج المشتق الزمني لكلّ من شعاعي الواحدة في جملة الإحداثيات القطبية (r,θ) .
5. استنتج سرعة الجسيم وتسارعه عند الحركة الخطية المنحنية وذلك باستخدام جملة الإحداثيات القطبية (r,θ) .
6. استنتج معادلة المسار $y=f(x)$ لجسيم مادي في أثناء حركة القذف بتسارع ثابت هو تسارع الجاذبية الأرضية .
7. عرّف ما يلي وأعطِ مثالاً على كلّ تعريف : الحركة الانسحابية لجسم صلب – الحركة الدورانية لجسم صلب – الحركة المستوية العامة لجسم صلب .
8. استنتج العلاقات التي تربط بين عناصر الحركة الانسحابية المستقيمة وعناصر الحركة الدورانية.
9. اشرح طريقة تعيين السرعة الخطية لجسم صلب في الحركة المستوية العامة وذلك باستخدام مفهوم المركز اللحظي للسرعة الصفرية .
10. اشرح طريقة تعيين التسارع الخطي لجسم صلب في الحركة المستوية العامة .
11. عرّف الحركة المركّبة لجسيم مادي ، وأعطِ مثالاً عليها .
12. استنتج علاقة السرعة الخطية في الحركة المركّبة للجسيمات المادية .
13. استنتج علاقة التسارع الخطي في الحركة المركّبة للجسيمات المادية .
14. ما هو المقصود بالتسارع المتمم ؟ وكيف يتحدد قيمة واتجاهاً ؟

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

ثالثاً – أسئلة نظرية على قسم التحريك

أجب عمّا يلي :

1. عدِّد الطرق الثلاث المستخدمة في حل مسائل علم التحريك .
2. اشرح بإيجاز كيفية تطبيق القانون الأساسي في التحريك على الحركة الخطية المنحنية باستخدام الأنواع المختلفة لجمل الإحداثيات .
3. متى يستخدم مبدأ العمل والطاقة في علم التحريك ؟
4. استنتج معادلة العمل والطاقة للجسيمات المادية .
5. متى يستخدم مبدأ الدفع وكمية الحركة في علم التحريك ؟
6. ما المقصود بالمفاهيم الآتية في علم التحريك : العمل – الدفع – كمية الحركة ؟
7. استنتج معادلة الدفع وكمية الحركة للجسيمات المادية .
8. استنتج العلاقة بين عزم كمية الحركة وعزم القوة بالنسبة للجسيمات المادية .
9. ما المقصود بالاستطاعة ؟ اذكر وحدة قياسها في الجملتين الدولية والانكليزية .
10. ما المقصود بالمردود الميكانيكي للآلة ؟
11. عرِّف عزم العطالة ، ثم وضّح كيفية حسابه .
12. استنتج المعادلتين الشعاعيتين الأساسيتين في دراسة تحريك الأجسام الصلبة .
13. استنتج علاقة الطاقة الحركية لجسم صلب يتحرك حركة انسحابية .
14. استنتج علاقة الطاقة الحركية لجسم صلب يتحرك حركة دورانية .
15. استنتج علاقة الطاقة الحركية لجسم صلب يتحرك حركة مستوية عامة .
16. عرِّف التصادم ، ثم اذكر أنواعه المختلفة .
17. عرِّف الاهتزاز ، ثم اذكر أنواع الاهتزازات الميكانيكية ، وأعطِ أمثلة عليها .
18. ما المقصود بالمفاهيم الآتية :

    دور الاهتزاز – تردد الاهتزاز – نسبة التخامد

19. استنتج معادلة مسار الحركة الخاصة بالأقمار الصناعية التي تدور حول الأرض .

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

المراجع المستخدمة

Used Reference Books

المراجع العربية :

1. الميكانيك النظري : علم السكون ، د.خالد رشدي بركات وآخرون ، منشورات جامعة دمشق 2002-2003 .
2. الميكانيك الهندسي : علم السكون ، د. رشدي النجار وآخرون ، منشورات جامعة دمشق 2010-2011 .
3. الميكانيك الهندسي : علم الحركة ، د. اسكندر عمجة وآخرون ، منشورات جامعة دمشق 2013-2014 .
4. الميكانيك الهندسي : علم التحريك ، د. اسكندر عمجة وآخرون ، منشورات جامعة دمشق 2011-2012 .
5. الميكانيكا النظرية ، تأليف س.تارج ، ترجمة أحمد صادق القرماني ، دار مير .
6. الميكانيكا الهندسية : الاستاتيكا والديناميكا ، ، تأليف ا.و.نلسون وآخرون ، ترجمة فايز فوق العادة ، أكاديميا للطباعة والنشر - 2002 .
7. الميكانيكا : الديناميكا ، تأليف جوزيف شيلي ، ترجمة أمين الأيوبي ، أكاديميا للطباعة والنشر - 1999 .
8. الميكانيكا الهندسية : الاستاتيكا ، ، تأليف ج.ل.ميريام ، ترجمة ف.الصالحي وآخرون ، مركز الكتب الأردني .
9. الميكانيكا الهندسية - الديناميكا ، ، تأليف ج.ل.ميريام ، ترجمة ف.الصالحي وآخرون ، مركز الكتب الأردني .

المراجع الأجنبية:

1. Engineering Mechanics : Statics & Dynamics . Eleventh edition . R.C.Hibbeler .
2. Engineering Mechanics : Statics. Fourth edition . J.L.Meriam / L.G.Kraige .
3. Engineering Mechanics : Dynamics. Third edition . J.L.Meriam / L.G.Kraige .
4. Engineering Mechanics : Statics & Dynamics . F.Costano/M.Plesha/G.Gray . Mc Graw Hill
5. Vector Mechanics for Engineers : Statics & Dynamics . Beer/Johnston/Mazurek/Cornwell/Elsenberg .
6. Engineering Mechanics : Dynamics. SI edition . R.Soutas/D.Inman/D.Balint.
7. Engineering Mechanics : Statics. SI edition . I.H.Shames.
8. Engineering Mechanics : Statics. SI edition . N.H.Dubey. Asian Books Private Limited .
9. Engineering Mechanics . SI edition . U.C. Jindal. Asian Books Private Limited .
10. Engineering Mechanics : Statics Principles. A.Bedford / W.Fowler .University of Texas .



Damascus University